SS 2012 | Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch | Fakultät für Mathematik

# Übung Inverse Probleme

Blatt 6

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie die adjungierten Operatoren $A^*$ folgender linearer Operatoren:

(i) $A : \ell^2 \to \ell^2 : \{x_n\} \mapsto \{(Ax)_n\}, \quad (Ax)_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} x_j,$

wobei $\ell^2$ der unendlichdimensionale Folgenraum ist, dessen Elemente quadratsummierbar sind;

(ii) $A : L^2(a,b) \to \mathbb{R}, \quad Af = \int_a^b f(x)dx;$

(iii) $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b), \quad [Ax](s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt$ mit $k \in L^2((a,b) \times (a,b))$;

(iv) $A : L^2(0,T) \to L^2(0,T), \quad [Ax](s) = \int_0^s x(t)dt.$

**Aufgabe 2**

Seien $X, Y$ separable Hilberträume über $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ der zu $A$ adjungierte Operator. Zeigen Sie

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp \quad \text{und} \quad \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp.$$

**Aufgabe 3**

Seien $X, Y$ separable Hilberträume über $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $y \in Y$. Es sei weiterhin $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} : Y \to Y$ die orthogonale Projektion von $Y$ auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$, welche wie folgt definiert ist:
Sei $U$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $X$. Die stetige lineare Abbildung $P_U : X \to U$ mit

$$P_U : x = u + v \mapsto u, \qquad \text{mit } u \in U \text{ und } v \in U^\perp$$

heißt orthogonaler Projektor von $X$ auf $U$.
Für $x \in X$ sind äquivalent

(i) $Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} y,$

(ii) $\|Ax - y\|_Y \le \|A\phi - y\|_Y, \qquad \forall \phi \in X,$

(iii) $A^*Ax = A^*y$ (Normalgleichung).

**Hinweise:** Zeigen Sie den Ringschluss $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Für die zweite Implikation betrachten Sie die Ableitung des quadratischen Polynoms $F(\lambda) = \|A(x + \lambda\phi) - y\|_Y^2$ in $\lambda = 0$ für ein beliebiges $\phi \in X$. Für die dritte Implikation nutzen Sie geeignete Beziehungen von Bild- und Nullräumen, welche in diesem Fall für lineare Operatoren und ihre zugehörigen adjungierten gelten.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml`

**Termine und Räume:**

| | | Zeit | Raum | |
|---|---|---|---|---|
| VL | Di | 10-12 | LE 103 | Arnd Rösch |
| | Do | 10-12 | LE 103 | |
| Üb | Mo | 14-16 | LE 103 | Hendrik Feldhordt |