

Übung Inverse Probleme

Blatt 8

Aufgabe 1

Wir betrachten den kompakten Integraloperator

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad [Ax](s) = \int_0^s x(t) dt.$$

Man zeige, dass das singuläre System des Operators gegeben ist durch

$$\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{(j - \frac{1}{2})\pi}; \sqrt{2} \cos \left((j - \frac{1}{2})\pi t \right); \sqrt{2} \sin \left((j - \frac{1}{2})\pi t \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Aufgabe 2

Seien X, Y und Z separable Hilberträume. Ferner sei für zwei injektive Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(X, Z)$ die Ungleichung

$$\|Ax\|_Y \leq C \|Bx\|_Z \quad \forall x \in X$$

mit einem $C > 0$ erfüllt. Man zeige folgende Aussagen:

- (i) Falls B kompakt ist, dann ist auch A kompakt;
- (ii) Sind A und B kompakt und ist die Operatorgleichung $Ax = y$ höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$, so ist auch die Operatorgleichung $Bx = z$ höchstens inkorrekt vom Grade ν .

Aufgabe 3

Welchen Grad der Inkorrektheit besitzt die Faltungsgleichung

$$\int_0^s \exp \left(-\frac{1}{s-t} \right) x(t) dt = y(s), \quad 0 \leq s \leq 1$$

in den Räumen $X = Y = L^2(0, 1)$?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	LE 103	Arnd Rösch
	Do	10-12	LE 103	
Üb	Mo	14-16	LE 103	Hendrik Feldhordt