SS 2012 | Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch | Fakultät für Mathematik

Übung Inverse Probleme

Blatt 10

Aufgabe 1

Seien X, Y separable Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompakt mit $\dim(\mathcal{R}(A)) = \infty$. Zeigen Sie: Bei der Tichonov-Regularisierung der linearen Operatorgleichung $Ax = y$ gelten für die regularisierten Lösungen x_α^δ definiert durch

$$x_\alpha^\delta := (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* y_\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j$$

und

$$\psi(\alpha) := \|x_\alpha^\delta\|_X^2$$

folgende Grenzwertbeziehungen:

(i) $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \psi(\alpha) = 0, \quad \forall y_\delta \in Y,$

(ii) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \psi(\alpha) = \|A^\dagger y_\delta\|_Y^2$ für $y_\delta \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$,

(iii) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \psi(\alpha) = \infty$ für $y_\delta \notin \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$.

Aufgabe 2

Seien wieder X, Y separable Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ kompakt mit $\dim(\mathcal{R}(A)) = \infty$. Sei $x_{\frac{1}{\beta}}^\delta$ die durch die Tichonov-Regularisierung mit $\alpha = \frac{1}{\beta}$ gewonnene regularisierte Lösung zur linearen Operatorgleichung $Ax = y$. Zeigen Sie: Für $y_\delta \notin \mathcal{N}(A)$ ist die Funktion

$$\phi(\beta) := \|A x_{\frac{1}{\beta}}^\delta - y_\delta\|_Y^2 - \delta^2$$

für alle $\beta > 0$ monoton fallend und streng konvex.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	LE 103	Arnd Rösch
	Do	10-12	LE 103	
Üb	Mo	14-16	LE 103	Hendrik Feldhordt