WS 2012/13
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1
Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen:

1. $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0$,
2. $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0$,
3. $\partial_t u + \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$.

Aufgabe 2
Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$ werden die folgenden Randwertaufgaben betrachtet:

1. $-\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$,
2. $-\Delta u + au = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n u + \alpha u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$,

mit Konstanten $a > 0$ und $\alpha \geq 0$. Man zeige, dass diese Randwertaufgaben jeweils höchstens eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ haben können. Welches Problem ergibt sich im Fall $a = 0$?

Aufgabe 3
Seien $\alpha \in (0, 2)$ und $\Omega := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \alpha\pi\}$ das kreissegment mit Öffnungswinkel $\alpha\pi$. Für $u \in C^2(\Omega)$ sei $v : [0, 1) \times [0, \alpha\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$v(r, \varphi) := u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Zeigen Sie:

(a) Für den Laplace-Operator gilt

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} \qquad \text{für alle } r > 0$$

(b) Die Funktion $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)$ löst das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

(c) Für $\alpha > 1$ ist der Gradient ∇u auf Ω nicht beschränkt, d.h. $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.

(d) Für alle $\alpha > 2$ ist ∇u auf Ω quadratisch integrierbar.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt