WS 2012/13
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 1
Zeigen Sie: Die Randwertaufgabe

$$-u_{xx} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0)=1, \quad u(1)=0$$

besitzt eine klassische Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, die jedoch nicht in $H^1(\Omega)$ liegt.
(Hinweis: Kreisgleichung)

Aufgabe 2
Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

(a) Man zeige, dass der Raum $H_0^1(\Omega)$ ein echter Unterraum von $H^1(\Omega)$ ist.

(b) In $H^1(\Omega)$ ist durch

$$|v|_{H^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

eine Halbnorm definiert. Zeigen Sie: In $H_0^1(\Omega)$ ist $|v|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent zur in der Vorlesung definierten $H^1(\Omega)$-Norm

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

($|v|_{H^1(\Omega)}$ ist also eine Norm in $H_0^1(\Omega)$).

(Hinweis: Nutzen Sie die Poincaré-Ungleichung!)

Aufgabe 3
Leiten Sie die schwache Formulierung des folgenden Randwertproblems her:

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x) &= g_1(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_1, \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) &= g_2(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_2 \qquad (\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Sei V ein linearer Raum und $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform (d.h. linear in beiden Argumenten) mit

$$\begin{aligned}
a(v,w) &= a(w,v) && \text{für alle } v,w \in V, \\
a(v,v) &> 0 && \text{für alle } v \in V, v \neq 0.
\end{aligned}$$

Sei $f : V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional.
(Für das Poissonproblem wählt man $a(u,v) := \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ und $f(v) := \int\limits_\Omega fv$.) Ein weiteres Funktional $J : V \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - f(v).$$

Zeigen Sie:

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \iff a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt