WS 2012/13 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 1
Zur Diskretisierung von

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

wird ein nicht äquidistantes Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$$

gewählt. Wir setzen $h_j = x_j - x_{j-1}$. Zeigen Sie, dass die folgende Diskretisierung konsistent ist:

$$\frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{u_j - u_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} \right) = f_j$$

($u_j = u(x_j)$). Wie verhält sich der Konsistenzfehler im Vergleich zum Fall des äquidistanten Gitters?

Aufgabe 2
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat und $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Wir betrachten auf Ω die Poissongleichung $\Delta u = f$ mit Dirichlet-Randbedingungen. Wir benutzen ein gleichmäßiges kartesisches Gitter mit Gitterpunkten (x_i, y_j), wobei $x_i = ih$, $y_j = jh$. Verwenden Sie für die Diskretisierung des Laplace-Operators den kompakten 9-Punkte-Stern (Mehrstellenformel):

$$\begin{aligned}\Delta_9 u_{i,j} = \frac{1}{6h^2} (&4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} + \\ &+ u_{i-1.j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} - 20u_{i,j}) .\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta_9 u_{i,j} = f_{i,j} \quad \text{mit } f_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

eine Approximation 2. Ordnung für die Poisson-Gleichung ist.

(b) Ist

$$\begin{aligned} F_{i,j} &:= f_{i,j} + \frac{h^2}{12} \Delta_5 f_{i,j} \\ &= f_{i,j} + \frac{1}{12} (f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j}) , \end{aligned}$$

so ist $\Delta_9 u_{i,j} = F_{i,j}$ eine Approximation 4. Ordnung für die Poisson-Gleichung.

Aufgabe 3
Sei A_h die zum 5-Punkte-Operator auf dem Einheitsquadrat gehörende $N \times N$-Matrix (bei zeilenweiser Nummerierung der Gitterpunkte mit m Punkten in jeder Zeile). Die $N = m^2$ Eigenvektoren $w^{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, \dots, m$, und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{\mu\nu}$ von A_h sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} w^{\mu\nu}(x,y) &= \sin(\nu\pi x)\sin(\mu\pi y), \qquad (x,y) \in \Omega_h \\ \lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{h^2}\left(4 - 2(\cos(\nu h\pi) + \cos(\mu h\pi)\right). \end{aligned}$$

Man zeige, dass für die Spektralkonditionszahl $\kappa(A_h)$ von A_h gilt:

$$\mathrm{cond}_2(A_h) = \kappa(A_h) =: \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{\lambda_{\min}(A_h)} = \frac{4}{\pi^2 h^2} + \mathcal{O}(1).$$

Aufgabe 4
Zur Auffrischung der Kenntnisse über iterative Lösungsverfahren: Eine Vereinfachung des Jacobi-Verfahrens zur Lösung eines linearen $N \times N$-Gleichungssystems $Ax = b$ ist das sogenannte Richardson-Verfahren. Dabei wird ausgehend von einem beliebigen Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^N$ mit einem Dämpfungsparameter $\omega \in \mathbb{R}$ wie folgt iteriert:

$$x^{l+1} = x^l - \omega(Ax^l - b) \qquad l = 0, 1, \dots.$$

(a) Im Falle, dass A nur reelle Eigenwerte $\lambda_{\min} \le \dots \le \lambda \le \dots \le \lambda_{\max}$ besitzt, zeige man für den Spektralradius $\rho(M_\omega)$ der zugehörigen Iterationsmatrix $M_\omega = I - \omega A$ die Gleichung

$$\rho(M_\omega) = \max\{|1 - \omega\lambda_{\min}|, |1 - \omega\lambda_{\max}|\}.$$

(b) Im Falle, dass zusätzlich alle Eigenwerte positiv sind, zeige man

$$\rho(M_\omega) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

(c) Für welchen Wert von ω wird $\rho(M_\omega)$ in diesem Falle minimal?

(d) Man zeige: Wenn A mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt, divergiert das Richardson-Verfahren für jede Wahl von $\omega \in \mathbb{R}$.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt