WS 2012/13 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 1
Wir betrachten das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ auf dem einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Formulieren Sie das zugehörige Variationsproblem und zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für homogene Dirichlet-Randwerte mit Hilfe des Lax-Milgram Lemmas.

(b) Welche Änderungen ergeben sich für das gemischte Problem mit Randwerten

$$\partial_n u = g_N \qquad \text{auf } \Gamma_N \qquad u = g_D \qquad \text{auf } \Gamma_D \qquad (\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N)?$$

(c) Auch für das reine Neumannproblem kann man Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im Unterraum $V = \{v \in H^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega v \ dx = 0\}$ zeigen. Welche zusätzliche Forderung an die Daten f und g_N benötigt man?

Aufgabe 2
Wir betrachten einen Projektionsoperator $P\colon C[0,1] \to V_N$, der gegeben ist durch

- $V_N := \operatorname{span}\{x^k\}_{k=0}^N$
- Finde $Pu \in V_N$: $\quad \int_0^1 (u - Pu) \cdot v_N = 0 \quad \forall v_N \in V_N$

Wie kann man Pu für gegebenes u berechnen?

Aufgabe 3
Das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)^2$ werde auf einem äquidistanten, kartesischen Gitter mit der Gitterweite h mit Hilfe der FE-Methode mit stückweise bilinearen Ansatzfunktionen diskretisiert. Man stelle die zugehörigen Systemmatrizen auf:

(a) mit exakter Integration,

(b) unter Verwendung der 2-dimensionalen "Tensorprudukt-Trapezregel"

$$Q_T(f) := \frac{|T|}{4} \sum_{i=1}^{4} f(a_i), \qquad a_i \text{ Eckpunkte der Zelle } T.$$

Welche Besonderheit ergibt sich?

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe)
Eine kleine Aufgabe zum Einstieg: Betrachten Sie die übliche äquidistante Diskretisierung des 1D-Laplace-Eigenwertproblems in $\Omega = (0, 1)$

$$-D^+D^-u_h = \lambda u_h, \qquad \text{in } \Omega_h, \qquad u_h(0) = u_h(1) = 0.$$

Die Schrittweite sei $h = 1/n$. Erstellen Sie ein Programm, welches für variables (einzugebendes) n berechnet:

- die Matrix A_h (diskretisierte Matrix des Laplace-Operators)
- die Eigenwerte von A_h (numerisch)
- einen Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von A_h.

Zeichnen Sie die zum dritten Punkt gehörende Näherungslösung u_h für $n = 4, 8, 16, 32, 64$ und geben Sie den jeweils kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(n)$ an. Welche Vermutung haben Sie, wie sich $\lambda_{\min}$ für $n \to \infty$ verhält?
Hinweis:
In Matlab können Sie die Routinen *eig* (bzw. *eigs* für dünnbesetzte Matrizen) und *plot* nutzen. Machen Sie sich nach Möglichkeit mit dem Konzept dünnbesetzter Matrizen in Matlab vertraut (**help sparse**).

Aufgabe 5 (Programmieraufgabe)
Implementieren Sie in Matlab die Konstruktion der Matrix A_h aus Aufgabe 3 des letzten Blattes. Bestimmen Sie numerisch die spekrale Konditionszahl und verifizieren Sie damit die Aussage der Aufgabe für verschiedene Werte von N. Schreiben Sie eine zusätzliche Funktion für das Richardson-Verfahren, die entkoppelt ist und der alle nötigen Variablen und Parameter übergeben werden. Testen Sie das Richardson-Verfahren für eine geeignete Wahl von Parametern ω und vergleichen Sie das Konvergenzverhalten (z.B. durch Messung der Anzahl von Iterationen, um ein Anfangsfehler e^0 auf ein Fehler ϵe^0 zu reduzieren (für eine genügend kleine Toleranz ϵ)). Wie verhält sich die Konvergenzrate für feiner werdende Diskretisierungen? Die Wahl der rechten Seite sei Ihnen dabei freigestellt.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt