

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 6

Aufgabe 1

Das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ werde auf einem äquidistanten, kartesischen Gitter mit der Gitterweite h mit Hilfe der FE-Methode mit stückweise bilinearen Ansatzfunktionen diskretisiert. Man stelle die zugehörigen Systemmatrizen auf:

(a) mit exakter Integration,

(b) unter Verwendung der 2-dimensionalen "Tensorprodukt-Trapezregel"

$$Q_T(f) := \frac{|T|}{4} \sum_{i=1}^4 f(a_i), \quad a_i \text{ Eckpunkte der Zelle } T.$$

Welche Besonderheit ergibt sich?

Aufgabe 2

Es sei V ein Hilbertraum, $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige symmetrische, elliptische Bilinearform und $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und linear. Für alle $v \in V$ wird die Norm $\|v\|_a^2 := a(v, v)$ definiert und es sei $u \in V$ die Lösung von

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Gegeben sei ein endlich dimensionaler Unterraum $V_h \subset V$ mit einer stetigen symmetrischen Bilinearform $a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass für ein $\alpha > 0$ und für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_a^2.$$

Weiter sei $u_h \in V_h$ die Lösung von

$$a_h(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\|u - u_h\|_a \leq \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{\alpha + 1}{\alpha} \|u - v_h\|_a + \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)}{\alpha \|w_h\|_a} \right\}.$$

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe)

Für den Projektionsoperator aus Aufgabe 2 des letzten Blattes berechne man Pu für:

- $u(x) = e^x$,
- Basis in V_N sei $\{x^0, x^1, \dots, x^N\}$
- $N = 0, 1, 2, 5$ sowie $N = 10, 11, 12, 15$.

- (a) Man gebe $(Pu)(\frac{1}{2})$ und den Fehler $(Pu)(\frac{1}{2}) - u(\frac{1}{2})$ für jeden Wert von N aus!
- (b) Man zeichne Pu auf dem Intervall $[0, 1]$ für jedes N über einem Gitter der Schrittweite $h = 1/10!$ (Nutzen Sie nach Möglichkeit die Routine `subplot(2,4,i)`).
- (c) Man berechne oder schätze jeweils die Konditionszahl der zugrundeliegenden Systemmatrix.
- (d) Wie kann die spezielle rechte Seite effektiv berechnet und programmiert werden?

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt