WS 2012/13 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Wir wollen in den nächsten Übungen ein einfaches FEM-Programm erstellen: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f \qquad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g_D \qquad \text{auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g_R \qquad \text{auf } \Gamma_R, \end{aligned}$$

mit $c(x) \geq 0$, $\alpha(x) \geq 0$, $g_D \equiv 0$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_R$.
Welche Schritte sind konkret notwendig, wenn dieses Problem mittels FEM diskretisiert werden soll? Wir betrachten dabei zwei Probleme (siehe Abb. 1). Das linke Problem soll letztlich gelöst werden. Das rechte Problem dient zum Testen des Programmes, denn hier sind die exakte analytische Lösung und die FEM-Lösung bekannt (wie lauten sie?).

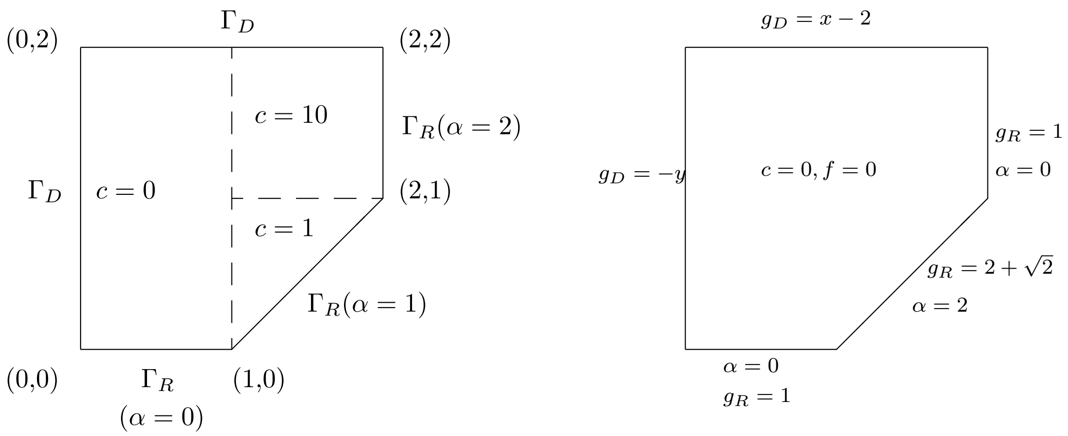

Abbildung 1: Problem 1 (links) und Testproblem 2 (rechts)

Die Geometrie ist bei beiden Problemen gleich. Daten für Problem 1 (links): $f(x, y) = 2$, $g_R(x, y) = 3$, $g_D(x, y) = 0$, $c(x, y), \alpha(x, y)$ wie in Skizze links. Daten für Problem 2: siehe Skizze (rechts). In Abbildung 2 ist eine grobe Vernetzung gegeben.

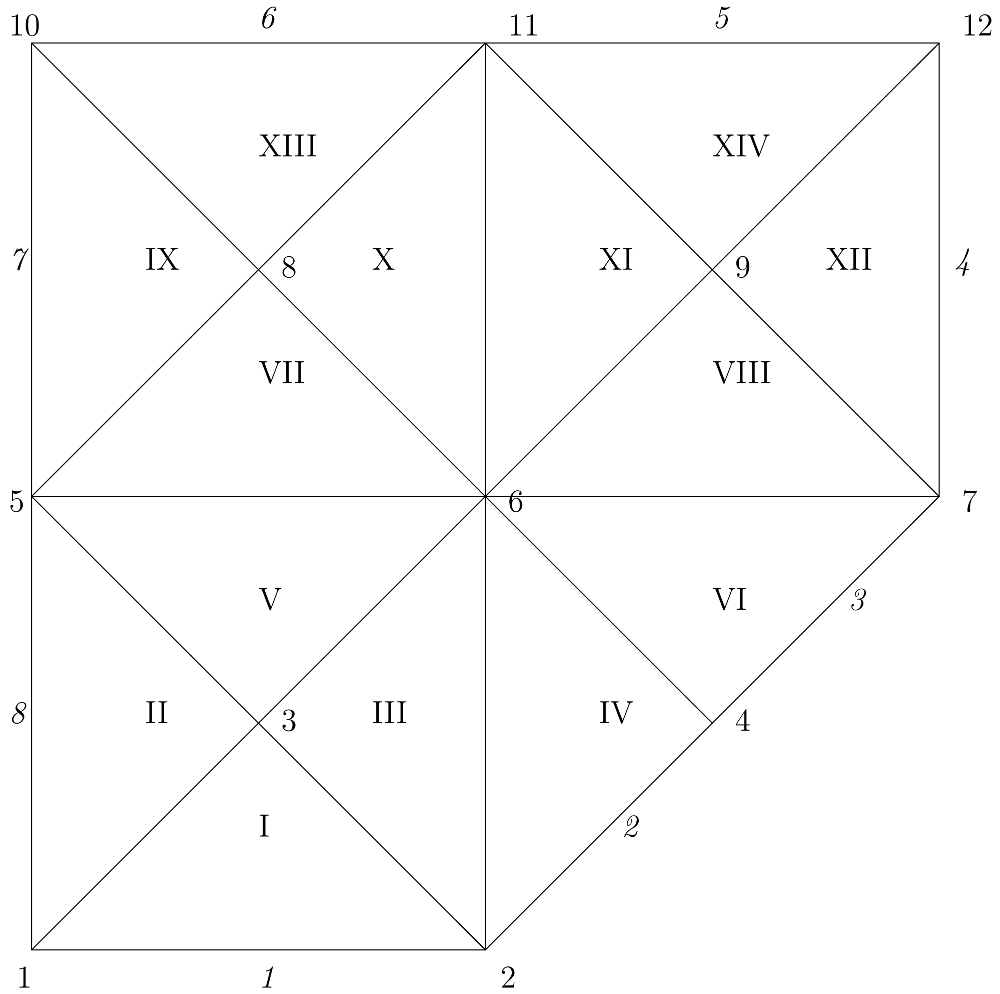

Abbildung 2: Vernetzung

Aufgabe 1
Für die Vernetzung erstelle man die m-Files

- `coords`
- `element3`
- `Dirichlet`
- `Robin`

Die Knotentabelle `coords` enthalte die Nummer des Knotens und die x, y Koordinaten. Die Elementzusammenhangstabelle `element3` enthalte die Nummer des Elements und die 3 Knotennummern. Die Datenstruktur für die Randbedingungen enthalte die Kantennummer, den Anfangs- und den Endknoten.
Zeichnen Sie mit Matlab dieses Netz. Sie können die Funktion $u(x, y) \equiv 0$ über dem Netz zeichnen und sehen so das Netz. Dafür können Sie die Routine `trisurf` verwenden.

Aufgabe 2
Passend zur Problemstellung erstelle man folgende Funktionen (Die Variable `Bsp` sei 1 für Problem 1 und 2 für das Testproblem 2):

- `function HilfsVar=f(Bsp,Punkt)`
  Input: `Bsp`,`Punkt=[x,y]` ist der Vektor mit den Koordinaten (x, y) von `Punkt`
  Output: $f(x, y)$

- `function HilfsVar=c(Bsp,Punkt)`
  Input: `Bsp`,`Punkt=[x,y]` ist der Vektor mit den Koordinaten (x, y) von `Punkt`
  Output: $c(x, y)$

- `function HilfsVar=gR(Bsp,Punkt)`
  Input: `Bsp`,`Punkt=[x,y]` ist der Vektor mit den Koordinaten (x, y) von `Punkt`
  Output: $g_R(x, y)$

- `function HilfsVar=gD(Bsp,Punkt)`
  Input: `Bsp`,`Punkt=[x,y]` ist der Vektor mit den Koordinaten (x, y) von `Punkt`
  Output: $g_D(x, y)$

- `function HilfsVar=alpha(Bsp,Punkt)`
  Input: `Bsp`,`Punkt=[x,y]` ist der Vektor mit den Koordinaten (x, y) von `Punkt`
  Output: $\alpha(x, y)$

- `function S=Schwerpunkt(Knoten)`
  Input: 2 oder 3 Knotennummern: `Knoten=[i1 i2 i3]` oder `Knoten=[i1 i2]`
  Output: Schwerpunkt $S = [x_S, y_S]$ der 2 oder 3 Knoten

  Achtung: Universell programmieren für beliebige Anzahl von Knoten mithilfe `sum` und `size`. Deklarieren Sie das Koordinatenfeld als globale Variable, sowohl im Hauptprogramm als auch in dieser Subroutine (durch `global coords`).

Aufgabe 3
Überprüfen Sie Ihre Routinen, indem Sie für `Bsp=1` und `Bsp=2` berechnen und ausgeben:

- `f(Bsp,[1 1])`, `c(Bsp,[1.5,1.5])`

- `gR(Bsp,[0.7 0])`, `gD(Bsp,[0 1.414213])`

- `alpha(Bsp,[0.7 0])`
  `alpha(Bsp,[1.5 0.5])`
  `alpha(Bsp,[2 2])`

- `Schwerpunkt([1 2])`
  `Schwerpunkt([1 2 3])`
  `Schwerpunkt([1 2 7 10 12])`

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_WS1213.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	LE 102	Arnd Rösch
	Do	14-16	LE 102	
Üb	Do	10-12	LE 102	Hendrik Feldhordt