

## 2. Übung Inverse Probleme

1. Wir betrachten die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

mit den Randbedingungen

$$a(0)u'(0) = b_0, \quad \text{und} \quad a(1)u'(1) = b_1. \quad (2)$$

Dieses Randwertproblem kann als eindimensionales Modell einer stationären Wärmeverteilung in einem inhomogenen Stab gesehen werden. Dabei bezeichnet  $u(x)$  die Temperatur im Punkt  $x$ ,  $a(x)$  die ortsabhängige Wärmeleitfähigkeit und  $f(x)$  eine zusätzliche Wärmequelle. An den Rändern des Stabes ist der Wärmefluss durch die Randbedingung bestimmt. Die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten  $a(x)$  aus der Kenntnis von  $u$  und  $f$  definiert ein inverses Problem (Parameteridentifikation).

(a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 2 & , x \in [0, 1/2] \\ 0 & , x \in (1/2, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad u(x) = \begin{cases} x^2 - x + 5/4 & , x \in [0, 1/2] \\ 1 & , x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede in  $[1/2, 1]$  differenzierbare Funktion  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(1/2) = 0$  und  $\varphi'(1/2) = 1$  der Koeffizient

$$a(x) = \begin{cases} x - 1/2 & , x \in [0, 1/2] \\ \varphi(x) & , x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

die Gleichung (1) erfüllt.

- (b) Zeigen Sie: Sei  $a(x)$  ein differenzierbarer Diffusionskoeffizient, welcher (1)-(2) erfüllt. Dann gilt

$$\int_0^1 f(s)ds = b_0 - b_1.$$

- (c) Sei  $f(x) = -1$  für  $x \in [0, 1]$  und  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$ . Für  $u(x) = x$  löst der Diffusionskoeffizient  $a(x) = x$  offensichtlich die Diffusionsgleichung. Zeigen Sie, dass zur gestörten Lösung

$$u_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \sin(x/\varepsilon^2)$$

der Diffusionskoeffizient

$$a_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + \cos(x/\varepsilon^2)}$$

gehört. Wie verhalten sich  $u_\varepsilon(x)$  und  $a_\varepsilon(x)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Wir kommen noch einmal zu dem Problem der letzten Übung zurück, welches durch folgende Integralgleichung gegeben war:

$$[A(x)](t) = \int_0^t x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3)$$

Wir überführen dieses Problem in ein endlichdimensionales. Das Intervall  $[0, 1]$  wird in  $n$  Teilintervalle der Länge  $h = 1/n$  mit den jeweiligen Intervallendpunkten  $t_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, n$  zerlegt. Die Funktionswerte in diesen Punkten werden mit  $x_i = x(t_i)$  bzw.  $y_i = y(t_i)$  bezeichnet.

- (a) Ersetzen sie (3) mit Hilfe der einfachen Rechteckregel in ein endlichdimensionales Problem der Gestalt

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{y}$$

mit  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\underline{x} = (x_i)_{i=1}^n$  und  $\underline{y} = (y_i)_{i=1}^n$ . Wie sieht die Matrix  $A$  aus?

- (b) Ist das diskretisierte Problem ebenfalls inkorrekt nach Hadamard?  
 (c) Es sei  $\underline{y}_\delta$  eine Näherung des Vektors  $\underline{y}$ . Zeigen Sie folgende Ungleichung des relativen Fehlers in  $\underline{x}$ :

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{x}_\delta\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \leq \kappa(\underline{A}) \frac{\|\underline{y} - \underline{y}_\delta\|_2}{\|\underline{y}\|_2},$$

wobei  $\kappa(\underline{A})$  die Konditionszahl der Matrix bezeichnet.

- (d) Woran lässt sich die Inkorrektheit von (3) in dem durch die Diskretisierung erzeugten linearen Gleichungssystem erkennen?

Homepage der Veranstaltung ist:

[http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV\\_krumbiegel\\_SS09.shtml](http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_krumbiegel_SS09.shtml)

### Termine und Räume:

|    |    | Zeit  | Raum   |                  |
|----|----|-------|--------|------------------|
| VL | Di | 12-14 | LE103  | Arnd Rösch       |
|    | Do | 12-14 | LE103  |                  |
| Ü  | Di | 16-18 | LE 407 | Klaus Krumbiegel |