Beispiel für ein schlecht gestelltes Problem (inverses Problem)

Wir betrachten die Bewegung eines auf der Strasse geradeaus fahrenden PKW. Dabei wird im Zeitraum $0 \leq t \leq T$ die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit gemessen. Die zugrundeliegende Beschleunigung des PKW ist durch die Bewegungsgleichung

$$x(t) = y'(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

gegeben, welche wir identifizieren wollen. Wir nehmen an, dass sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet. Dann wird der Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit durch die Integralgleichung

$$[F(x)](t) := \int_0^t x(s)ds = y(t)$$

beschrieben, welche ein Standardbeispiel für ein schlecht gestelltes mathematisches Problem ist. Wir geben uns eine exakte Lösung

$$x(s) = (s-1)^2 \qquad y(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{1}{3} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

vor und versehen die rechte Seite $y(t)$ mit kleinen Messfehlern, d. h. unsere gemessene Funktion sei y^δ mit

$$\|y - y^\delta\|_{L^2(0,1)} \leq \delta.$$

Die folgende Bilder zeigen die numerischen Ergebnisse nach einfacher Diskretisierung des Problems für einen Messfehler $\delta = 0.1\%$. Dabei erkennt man im linken Bild, dass

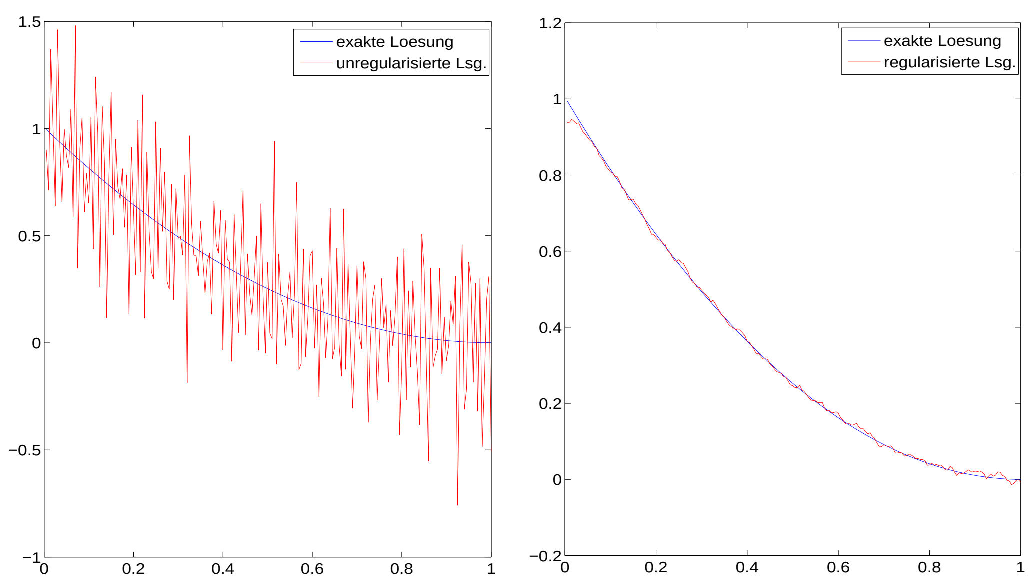

Abbildung 1: unregularisierte und regularisierte numerische Lösung für $\delta = 0.1\%$

die numerische Lösung dieses scheinbar einfachen Problems schon für kleine Messfehler komplett unbrauchbar ist. Zur Abhilfe wurde im linken Bild ein einfaches Regularisierungsverfahren benutzt.