

Musterlösung Analysis III

Hausübungen

Blatt 1

Aufgabe 1

Wir bestimmen der Reihe nach $\gamma'(t), \|\gamma'(t)\|$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|\gamma'(t)\|_2^2 &= (1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2 \\ &= 1 - 2\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2 \\ &= 2 - 2\cos(t) \\ &= 4\sin(t/2)^2\end{aligned}$$

Wir können nun die Länge von γ ausrechnen:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2|\sin(t/2)| dt = \int_0^\pi 4\sin(u) du = 8$$

Die Betragsstriche fallen weg, da $\sin$ im Integrationsbereich positiv ist.

Aufgabe 2

Aus Symmetriegründen können wir leicht S_z und S_x bestimmen. S_z muss gleich $\frac{h\pi}{2}$ und S_x gleich 0 sein. Wir wollen dies aber nochmal durch Rechnung bestätigen. Wir bestimmen zunächst die Länge der Kurve.

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2 + h^2} = \sqrt{1 + h^2} \\ \Rightarrow L(\gamma) &= \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{1 + h^2} dt = \pi\sqrt{1 + h^2}\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir S_x, S_y, S_z .

$$\begin{aligned}S_x &= \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^\pi \cos(t) \sqrt{1 + h^2} dt = \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) dt = 0 \\ S_y &= \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^\pi \sin(t) \sqrt{1 + h^2} dt = \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{1}{\pi} (-\cos(t)) \Big|_0^\pi \\ &\quad = \frac{1}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi} \\ S_z &= \frac{1}{L(\gamma)} \int_0^\pi ht \sqrt{1 + h^2} dt = \frac{h}{\pi} \int_0^\pi t dt = \frac{h\pi}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Anmerkung: In der Aufgabenstellung hat sich ein Fehler eingeschlichen. Die Parametrisierung muss „regulär“ sein. Das heißt, $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Sonst gilt die Behauptung nicht. Entschuldigung dafür.

Wir definieren $S : [a, b] \mapsto [0, L(\Gamma)], S(t) := \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| dt$. Nach dem Hauptsatz gilt dann $S'(t) = \|\varphi'(t)\|$. S' ist sogar echt größer 0, da φ nach Voraussetzung eine

reguläre Parametrisierung der Kurve Γ ist. Wir können also die Umkehrung S^{-1} definieren. Diese ist stetig differenzierbar.

$$S^{-1} : [0, L(\Gamma)] \mapsto [a, b]$$

Wir differenzieren S^{-1} und erhalten mit $s_0 = s(t_0)$

$$\frac{dS^{-1}}{ds} \Big|_{s=s_0} = \frac{1}{\frac{dS}{dt} \Big|_{t=t_0}} = \frac{1}{\|\varphi'(t_0)\|}$$

Betrachte nun die Parametrisierung $r : [0, L(\Gamma)] \mapsto \mathbb{R}^n$, bei der jedem Punkt $r(s) \in \Gamma$ die Bogenlänge s des Kurvenstücks von $\varphi(a)$ bis $r(s)$ zugeordnet wird. Wir definieren mit $s=S(t)$

$$r(s) = (\varphi \circ S^{-1})(s) = \varphi(t)$$

Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist r differenzierbar.

$$\begin{aligned} \frac{dr(s_0)}{ds} &= \frac{d}{ds}(\varphi \circ S^{-1})(s_0) \\ &= \varphi' \circ S^{-1}(s_0) \cdot (S^{-1})'(s_0) = \varphi'(t_0) \cdot \frac{1}{\|\varphi'(t_0)\|} \\ &\Rightarrow \|r'(s)\| = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung: Leider sind die Punkte auf dem ersten Übungszettel nicht eingetragen. Dies wird hier nachgereicht.

Aufgabe 1: 3 Punkte

Aufgabe 2: 4 Punkte

Aufgabe 3: 6 Punkte

Es bekommt bei Aufgabe 3 natürlich auch derjenige 6 Punkte, der auf die fehlende Voraussetzung hingewiesen hat.