

HM 100

(a) Da $x \notin \emptyset$ ist $\delta_x(\emptyset) = 0$

Zur σ -Additivität:

Seien $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \in \mathcal{P}(X)$ paarweise
disjunkt und $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

Ist $x \in A_n$ für ein n so ist
 $x \notin A_n$ für $n \neq m$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n) = \delta_x(A) = 1 = \delta_x(A)$$

Ist $x \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

folgt $\delta_x(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n)$.

(b) Sei f nicht negativ. Für jedes $r \in [0, \infty)$

mit $r \leq f(x)$ ist dann $f := r \cdot \chi_{\{x\}}$ eine
nicht negative Stufenfunktion mit $f \leq f$.

$$\Rightarrow \int_X f d\delta_x \geq \int_X r \cdot \chi_{\{x\}} d\delta_x = r \cdot \delta_x(\{x\}) = r.$$

Supremumsbildung über liefert $\int_X f d\delta_x \geq f(x)$.

Ist nun $\lambda: X \rightarrow [0, \infty)$ eine beliebige
nicht negative Stufenfunktion mit $\lambda \leq f$

mit der Darstellung $\lambda = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$

$\alpha_j \in [0, \infty)$, A_j (paarweise disjunkt) $\in \mathcal{P}(X)$

wobei O.B.d.A. $x \in A_1$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_X \lambda \, d\delta_x &= \int_X \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \, d\delta_x \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_x(A_j) = \alpha_1 = \lambda(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\delta_x &= \sup \left\{ \int_X \lambda \, d\delta_x : \lambda \text{ Stufenfkt mit } \lambda \leq f \right\} \\ &\leq f(x). \end{aligned}$$

Also folgt $\int_X f \, d\delta_x = f(x)$.

Ist f beliebig, benutzen wir

die Zerlegung $f = f_+ - f_-$.

(c) $f_n \rightarrow f$ fast überall, falls

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ für das eine

anfangs gegebene x .

Wir wählen $T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x}} \\ \frac{x}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$

Mit $x = \frac{y^2}{p}$ gilt dann

$$T^{-1} \begin{pmatrix} y^2/p \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p} \\ y^{3/2}/\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

Analoges gilt bei den anderen Parabeln.

Eine der beiden Komponenten ist immer konstant.

Die Umkehrfkt lautet:

$$T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{2/3} v^{4/3} \\ u^{4/3} v^{2/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det T' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{4/3} & \frac{4}{3} u^{2/3} v^{1/3} \\ \frac{4}{3} u^{1/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{4/3} v^{-1/3} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{4}{3} u \cdot v$$

Also folgt für den Flächeninhalt

$$\int_{\Omega} 1 \, d\lambda = \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{q}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{4}{3} u \cdot v \, du \, dv$$

$$= \frac{4}{3} \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{q}} v \, dv \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} u \, du = \frac{1}{3} (q - p)(b - a)$$

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N \mid \sum_{k=1}^N x_k^{1/2} < 1 \right\}$$

Gesucht ist $\int_{\mathbb{R}_+^N} \chi_B(x) dx$

Wir definieren

$$\underline{\Phi} : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1^2 \\ \vdots \\ y_N^2 \end{bmatrix}$$

Dann gilt: $x = \underline{\Phi}(y) \in B \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N (y_k^2)^{1/2} = \sum_{k=1}^N y_k < 1$

$$J_{\underline{\Phi}}(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2y_N \end{pmatrix}$$

$$|\det J_{\underline{\Phi}}(y)| = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N y_k > 0$$

Also ist $\underline{\Phi}$ ein globaler C^∞ -Diffeo, und

mit $\hat{B} := \left\{ y \in \mathbb{R}_+^N \mid \sum_{k=1}^N y_k < 1 \right\}$

gilt: $B = \underline{\Phi}(\hat{B})$

$$\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_B(\underline{\Phi}(y)) = 1 \Leftrightarrow y \in \hat{B}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \underbrace{\chi_B(\Phi(y))}_{=\chi_{\tilde{B}}(y)} |\det F_{\Phi}(y)| dy$$

$$= \int_{\tilde{B}} |\det F_{\Phi}(y)| dy = \int_{\tilde{B}} 2^N \left(\prod_{n=1}^N y_n \right) dy$$

Sei nun $N=2$

$$\tilde{B} = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y_1 + y_2 < 1 \}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(B) &= 2^2 \int_{\tilde{B}} y_1 \cdot y_2 dy \\ &= 4 \int_{y_1=0}^1 \left(\int_{y_2=0}^{1-y_1} y_1 y_2 dy_2 \right) dy_1 = \frac{1}{2} 4 \int_0^1 y_1 (1-y_1)^2 dy_1 \\ &= 2 \left[y_1 \left(-\frac{1}{3} \right) (1-y_1)^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^1 (1-y_1)^3 dy_1}_{=\frac{1}{4}} \right] \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Der Fall $N=3$ geht analog.

Vier Realgleichungen die Lösung von Blatt

Sei dazu $\beta \in \mathbb{R}^n$ messbar und

$$\tilde{\beta} := \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \beta \in \beta$$

sowie $\gamma := \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}_+$.

Dann haben wir

$$C := C(\beta, \gamma) := \left\{ (1-t)\tilde{\beta} + t\gamma \mid \beta \in \beta, t \in (0,1) \right\}$$

den Realgenierten Kegel mit Dimension $n+1$

und Basis β sowie Spitze γ .

Nun ist $\Omega := \mathbb{R}^n \times (0,1)$ offen und

$$\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine injektive C^∞ -Abbildung.

ferner gilt:

$$\tilde{\Phi}(\beta, t) = \begin{bmatrix} (1-t)\tilde{\beta} \\ t\gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\det \tilde{\Phi}(\beta, t) = (1-t)^n \cdot t > 0$$

Also ist Φ ein lokaler und damit auch globaler (Injektivität) C^∞ -Diffeo.

Mit $x = \Phi(b, \tau)$ folgt dann für alle $f \in L^1(C)$

$$\int_C f \, d\lambda_{N+1} = h \int_{(0,1)} \int_B f \circ \Phi(b, \tau) \, db (1-\tau)^N \, d\tau.$$

Für $f=1$ erhalten wir also

$$\lambda_{N+1}(C) = \frac{h}{N+1} \lambda_N(B)$$

nach einer kurzen Rechnung.

Wir benutzen doppelte Polar Koordinaten
(Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^2$).

$$\underline{\Phi} : \mathbb{R}_+^2 \times (0, 2\pi)^2 \rightarrow \underline{\Phi}(\Omega) \subset \mathbb{R}^4$$

$$(r, \varphi, \rho, \psi) \mapsto \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \rho \cos \psi \\ \rho \sin \psi \end{bmatrix}$$

$\underline{\Phi}$ ist ein globaler C^∞ -Diffeo., denn $\underline{\Phi}$
ist injektiv und es gilt

$$J_{\underline{\Phi}}(r, \varphi, \rho, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\rho \sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \rho \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$\det J_{\underline{\Phi}}(r, \varphi, \rho, \psi) = r \cdot \rho > 0$$

Für $r < \rho < 1$ gilt dann $x = \underline{\Phi}(r, \varphi, \rho, \psi) \in \Pi$
und mit $\Omega := \left\{ (r, \varphi, \rho, \psi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \right.$
 $\left. : r < \rho < 1 \right\}$

ist $\Pi \setminus \underline{\Phi}(\Omega)$ eine Nullmenge.

Der Transformationsatz (Perkregel $dx = r \rho d(r, \varphi, \rho, \psi)$)
und Fubini liefern:

$$\lambda_4(\Pi) = \int_{\Pi} 1 d\lambda_4 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} r \cdot \rho d\psi d\varphi dr d\rho = 2\pi^2 \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi^2}{2}.$$

15 110

Mit $x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und dem

Satz von Fubini (für nicht negative Fkt.)

bestimmen wir mit partieller Integration

$$\int_{\mathbb{R}_+^3} x_3^3 \exp(-x_3^2(1+x_1^2+x_2^2)) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{x_3^2}_{=1} \cdot \underbrace{x_3 \exp(-x_3^2(1+|x'|^2))}_{=1} dx_3 dx'$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}} x_3 \cdot \exp(-x_3^2(1+|x'|^2)) dx_3 \frac{1}{1+|x'|^2} dx'$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{x_3^2 \exp(-x_3^2(1+|x'|^2))}_{=0} \Big|_0^\infty \cdot \frac{1}{1+|x'|^2} dx' = 0$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{-\frac{1}{2} \exp(-x_3^2(1+|x'|^2))}_{=+\frac{1}{2}} \Big|_0^\infty \cdot \frac{1}{(1+|x'|^2)^2} dx' = +\frac{1}{2}$$

Polar
Koordinaten.

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\varphi dr = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+r^2} \right) \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

Vir bestimmen zunächst Maß und Schwerpunkt der Kugel mit Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} : \Omega := (0, r) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) &\rightarrow \underline{\Phi}(\Omega) \subset A \\ (t, \varphi, \Theta) &\mapsto t \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \\ \sin \Theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{\Phi}$ ist ein C^1 -Diffeo. mit $\det \underline{J}_{\underline{\Phi}}(t, \varphi, \Theta)$

$$= t^2 \cdot \cos \Theta \quad \text{und} \quad A \setminus \underline{\Phi}(\Omega) \text{ ist eine}$$

Nullmenge. Also gilt für alle $f \in L^1(A)$

$$\int_A f d\lambda_3 = \int_{\underline{\Phi}(\Omega)} f d\lambda_3 = \int_{\Omega} f \circ \underline{\Phi}(t, \varphi, \Theta) t^2 \cos \Theta d\varphi d\Theta dt$$

Speziell für $f = 1$ und $f = \text{id}$ folgt

$$\lambda_3(A) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{sowie}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3(A) \cdot \lambda(A) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underline{\Phi}(t, \varphi, \Theta) t^2 \cos \Theta d\varphi d\Theta dt \\ &= \frac{1}{4} r^4 \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \Theta d\Theta & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \Theta d\Theta & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta \\ 2\pi & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta & \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Sei nun g_u wie in der Aufgabe und
 g_0 also die Gerade durch den Schwer-
 punkt. Mit $y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ für $y \in \mathbb{R}^3$
 gilt dann

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(x, g_u) &= |x' - u'|^2 = |x'|^2 - 2\langle x', u' \rangle + |u'|^2 \\ &= \text{dist}^2(x, g_0) - 2\langle x', u' \rangle + l^2 \end{aligned}$$

und damit

$$T(A, g_u) = \int_A \text{dist}^2(x, g_u) dx = T(A, g_0) + l^2 \lambda_3(A)$$

$$\text{denn } \int_A \langle x', u' \rangle dx = u_1 \int x_1 dx + u_2 \int x_2 dx = 0$$

$$\text{weil } \int_A x' dx = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} t \cdot \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \end{bmatrix} t^2 \cos \Theta$$

$$d\Theta d\varphi dt = \int_0^r t^3 dt \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \Theta d\Theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \varphi \\ \cos \Theta \sin \varphi \end{bmatrix} d\varphi}_{=0} = 0$$

Wir bestimmen zu letzt noch $T(A, g_0)$

$$\begin{aligned} T(A, g_0) &= \int_A (x_1^2 + x_2^2) dx \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} t^2 \cos^2 \Theta \cdot t^2 \cos \Theta d\Theta d\varphi dt \end{aligned}$$

H16 U10

$$= \frac{2}{5} \pi r^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{2}{5} \pi r^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{5} \pi r^5 \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= \frac{8}{15} \pi r^5$$

Also erhalten wir für $u \in \mathbb{R}^3$

$$T(A, g_u) = \frac{8}{15} \pi r^5 + \frac{4}{3} \pi r^3 \ell^2$$

$$A := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \}$$

$$\underline{I} = \int_A x_1 x_2 x_3 dx = ?$$

Sei x_1 beliebig, aber fest.

$$A(x_1, \cdot, \cdot) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x_1 \notin (0, 1) \\ \left\{ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_0^1 \left[\int_{A(x_1, \cdot, \cdot)} x_1 x_2 x_3 d\lambda_2(x_2, x_3) \right] dx_1$$

Weiter ist

$$A(x_1, x_2, \cdot) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x_2 \notin (x_1, 1) \\ (x_2, 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_0^1 \left(\int_{(x_1, 1)} \left(\int_{(x_2, 1)} x_1 x_2 x_3 dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

$$= \frac{1}{48}$$

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < x_2 < 1 \right\}$$

$$\underline{I} := \int_B e^{x_2^2} d\lambda_2$$

$$B(x_1, \cdot) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } x_1 \notin (-1, 1) \\ (|x_1|, 1) & \text{für } x_1 \in (-1, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_{(-1, 1)} \left[\int_{(|x_1|, 1)} \underbrace{e^{x_2^2}}_{\uparrow} dx_2 \right] dx_1$$

ges. h. o. sseue Form. Also müssen wir die Integrationsreihenfolge umkehren.

$$\text{Also: } B(\cdot, x_2) = \begin{cases} \emptyset & x_2 \notin (0, 1) \\ (-x_2, x_2) & \text{für } x_2 \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_{(0, 1)} \int_{(-x_2, x_2)} e^{x_2^2} dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 2x_2 e^{x_2^2} dx_2 = \int_0^1 e^t dt = e - 1.$$

$f(x) := x_2 (4 - x_1^2 x_2^2)^{1/2}$ ist stetig und
 beschränkt auf $[0, 1]^2$ und daher integrierbar.
 Nach Fubini und mit der Substitution

$t(x_1) := \frac{x_2}{2} \cdot x_1$ folgt daher

$$\begin{aligned}
 \int_{[0,1]^2} f \, d\lambda_2 &= \int_0^1 \int_0^1 2x_2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4} x_2^2\right)^{1/2} dx_1 dx_2 \\
 &= 4 \int_0^1 \int_0^{x_2/2} (1 - t^2)^{1/2} dt dx_2
 \end{aligned}$$

Substituiere nun $t := \sin(s)$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]^2} f \, d\lambda_2 = 4 \int_0^1 \int_0^{\arcsin(x_2/2)} \cos^2(s) ds dx_2$$

Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^\tau \cos^2(s) ds = \int_0^\tau \sin^2(s) ds + \cos \tau \sin \tau$$

$$= \int_0^\tau (1 - \cos^2 s) ds + \cos \tau \sin \tau$$

$$\text{also } 2 \int \cos^2 \tau d\tau = \tau + \sin \tau (1 - \sin^2(\tau))^{1/2}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{[0,1]^2} f \, d\lambda_2 = 2 \int_0^1 \arcsin\left(\frac{x_2}{2}\right) + \frac{x_2}{2} \left(1 - \left(\frac{x_2}{2}\right)^2\right)^{1/2} dx_2$$

Wie oben mit partieller Integration

$$\int \arcsin(t) dt = \int \frac{t}{(1-t^2)^{1/2}} dt + t \cdot \arcsin(t)$$

H7 010

$$= (1-t^2)^{1/2} + t \cdot \arcsin(t)$$

was schließlich zu

$$\int_{[0,1]^2} f \, d\lambda_2 = 2 \cdot \left(2 \left(1 - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \right)^{1/2} + x_2 \arcsin \left(\frac{x_2}{2} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \right)^{3/2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \cancel{} + \frac{4}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3} \quad \text{folgt.}$$

$$Z_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 < 1 \right\}$$

$$Z_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}$$

$$\lambda \left(\underbrace{Z_1 \cap Z_2}_{=: \Omega} \right) = ?$$

$$\Omega(\cdot, \cdot, x_3) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 < 1 - x_3^2 \wedge x_2^2 < 1 - x_3^2 \right\}$$

$$= \left(\underbrace{- (1 - x_3^2)^{1/2}, + (1 - x_3^2)^{1/2}}_{=: \underline{I}(x_3)} \right) \times \underline{I}(x_3)$$

$$\text{Also } \Omega(\cdot, \cdot, x_3) = \underline{I}(x_3) \times \underline{I}(x_3)$$

$$\Rightarrow \lambda(\Omega) = \int_{-1}^1 \int_{\underline{I}(x_3)} \int_{\underline{I}(x_3)} 1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$= \int_{-1}^1 4 (1 - x_3^2) \, dx_3 = \frac{16}{3}$$

$$\text{Sei } V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$

Definiere $e: D \rightarrow V$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Dann gilt:

e ist wohl definiert

e ist stetig diff'bar

e ist bijektiv

$$\det J_e = 2 \neq 0$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

ist stetig und über V (kompakt)

integrierbar. Mit dem Transformationssatz

erhalten wir

$$\int_V F d\lambda_2 = \int_{e(D)} F d\lambda_2 = \int_D F(e(x, y)) \cdot |\det J_e| d\lambda_2$$

$$= \int_D 2 \cdot e^{-4x^2 - 4y^2} d\lambda_2(x, y) = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-4r^2} \cdot r d\varphi dr$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 e^{-4s} \cdot \frac{1}{2} ds = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4s} \right) \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2} (e^{-4} - 1)$$

$$H(10) \cup 10$$

Es ist $z \in [0, 1]$, da $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z \geq 0$

und $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq z^4$. Mit Kugelkoordinaten

$$\Phi: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi, \vartheta) \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

ist die Begrenzung durch $r^4 = r \cos \vartheta \Leftrightarrow r^3 = \cos \vartheta$ gegeben.

Für $\vartheta \in [0, \pi/2]$ ist also $0 \leq r \leq \sqrt[3]{\cos \vartheta}$.

Ist $\vartheta \in (\pi/2, \pi)$ ist $z < 0$ und somit $\Phi(r, \varphi, \vartheta)$

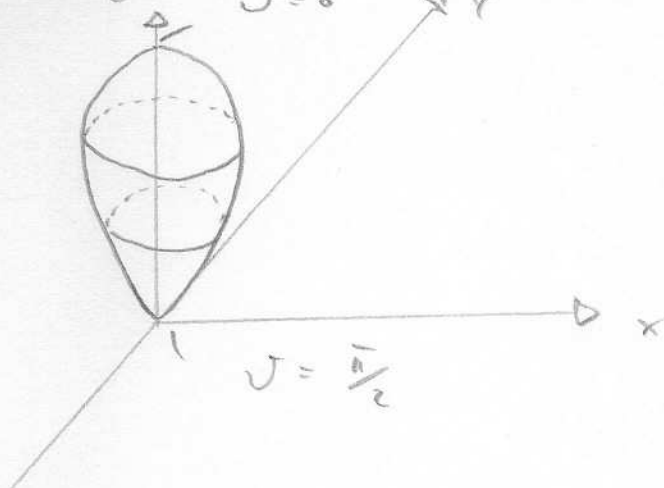
nicht mehr in der Menge enthalten. Es folgt

$$\int_V 1 \, d\lambda_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt[3]{\cos \vartheta}} |\det \Phi(r, \varphi, \vartheta)| \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

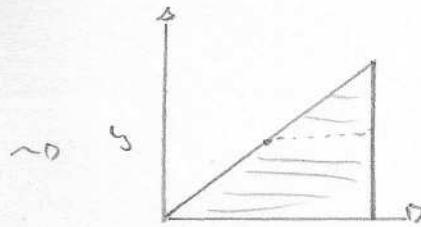
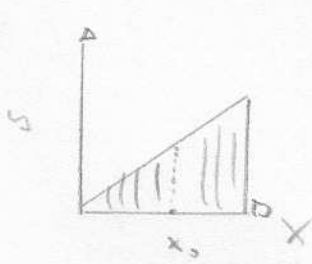
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta \cdot \frac{1}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3}$$



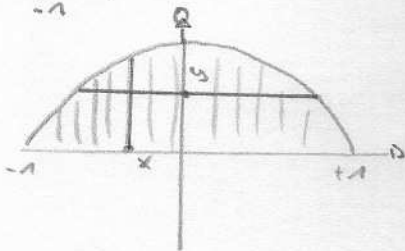
FIM 010

(a) Für $x_0 \in [0, 1]$ läuft y zwischen 0 und x_0 .



$$\text{Also } \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy$$

$$(b) \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$$

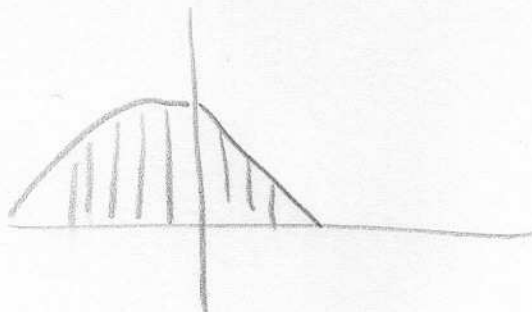


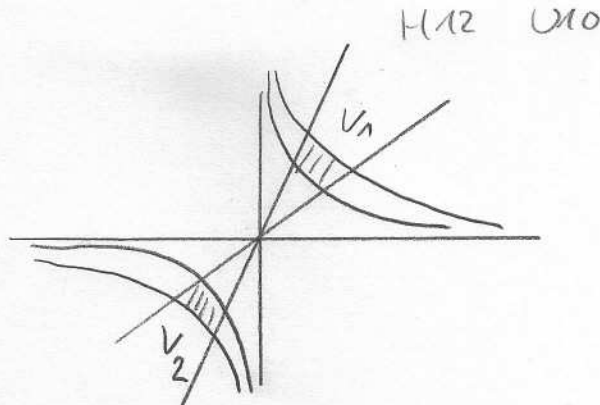
$$(c) \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$$

$\tilde{x} := -x$

$$= \int_0^1 \left[\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(-x, y) dy \right) dx + \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) \right] dx$$





Es ist $V = V_1 \cup V_2$, also $\int_V xy^3 d\lambda_2 = \int_{V_1} xy^3 d\lambda_2 + \int_{V_2} xy^3 d\lambda_2$

Da V_2 kompakt und $(x,y) \mapsto x \cdot y^3 =: F(x,y)$ stetig ist auf V_2 , ist F über V_2 integrierbar. Mit der Transformation $\varphi: V_2 \rightarrow V_1, (x,y) \mapsto (-x,-y)$ erhält man $\int_{V_1} F d\lambda_2 = \int_{V_2} F d\lambda_2$

Wir betrachten nun die vorgegebene Transformation:

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \left(\frac{y}{x}, x \cdot y\right), \quad x \neq 0$$

g ist stetig diff'bar. Außerdem ist $g|_{V_1}: V_1 \rightarrow g(V_1)$ bijektiv (nachrechnen).

$$\text{Mit } u = \frac{y}{x}, \quad v = xy = \frac{y^2}{u} \quad \text{folgt}$$

$$y = \sqrt{u \cdot v}, \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

Außerdem sehen wir aus $y=x$ und $y=3x$

$$1 < u < 3$$

$$\text{und mit } x \cdot y = 1 \quad x \cdot y = 4$$

$$1 < v < 4$$

$$\text{Also } g(V_1) = (1, 3) \times (1, 4)$$

Mit $h := g^{-1}$ gilt also $h(K) = V$, $K = (1,3) \times (1,4)$

und mit dem Transformationsatz und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_V F \, d\lambda_2 &= \int_K F \circ h \cdot |\det J_h| \, d\lambda_2 \\ &= \int_1^3 \int_1^4 F \circ h(u, v) |\det J_h(u, v)| \, d\lambda_2 \end{aligned}$$

Bestimmen wir also noch die Determinante

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} v^{\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{1}{2}) & u^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} & v^{-\frac{1}{2}} & u^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & u^{-\frac{1}{2}} & v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & u & v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J_h(u, v) = -\frac{1}{2u}$$

$$\begin{aligned} \text{Also} \\ \int_V F \, d\lambda_2 &= \int_1^3 \int_1^4 u \cdot v^2 \frac{1}{2u} \, dv \, du = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_1^4 v^2 \, dv \\ &= \frac{1}{3} (4^3 - 1^3) = \frac{63}{3} = 21 \end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt $\int_V F \, d\lambda_2 = 42$