

Wir beginnen mit dem Zylindermantel Z_n .

Betrachte die Karte $\phi: (0, 2\pi) \times (0, h) \rightarrow Z_n \subset \mathbb{R}^3$

mit $\phi(\varphi, z) := \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ Es ist

$$J_\phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & 0 \\ R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G_\phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_\phi(\varphi, z) = R^2$$

Also ergibt sich für das Flächenmaß

$$\int_{Z_n} 1 \, dS_n = \int_0^{2\pi} \int_0^h R \, dz \, d\varphi = 2\pi R h \text{ wie erwartet.}$$

Der Deck und Boden sind Kreise von Radius R , haben also die Fläche πR^2 . Insgesamt

$$\begin{aligned} \text{ergibt sich } O(Z) &= O(Z_n) + O(Z_D) + O(Z_B) \\ &= 2\pi R(R+h). \end{aligned}$$

Für den Kegelmantel K_n verwenden wir die

Karte $\psi: (0, 2\pi) \times (0, 4) \rightarrow K_n$, $\psi(\varphi, z) = (z \cos(\varphi), z \sin(\varphi), z)$

Es ist $J_\psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -z \sin \varphi & z \cos \varphi \\ z \cos \varphi & z \sin \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow G_\psi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} \text{ und hieraus } g_\psi(\varphi, z) = 2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow \int_{K_n} 1 \, dS_n = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{g_\psi(\varphi, z)} \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{2} \cdot z \, dz \, d\varphi = 16\sqrt{2} \cdot \pi$$

Der Deck hat die Fläche 16π , also erhalten wir die Gesamtfläche

$$O(K) = O(K_n) + O(K_D) = 16\pi(\sqrt{2} + 1)$$

Mit Beispiel 2 von Seite 74 sehen wir
 sofort ein, dass Γ als Graph der C^1 -Funktion
 h eine 2-dim. UMF von $\mathbb{R}^3$ ist. Denn
 die Funktion $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2+1} \quad (x, y) \mapsto (x, y, h(x, y))$
 ist eine injektive Immersion und die UMF
 $\varphi(U) \rightarrow U, (x, y, h(x, y)) \mapsto (x, y)$ ist offenbar stetig.

Also ist $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dim. UMF.

Nach 5.8 (S. 74) gilt für die Gramsche
 Matrix weiter $g(x, y) = \left(1 + \|\text{grad } h(x, y)\|_2^2 \right)$

Hier ist $\text{grad } h(x, y) = (2x, 2y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\Gamma} (1) &= \int_U \sqrt{1 + \|\text{grad } h(x, y)\|_2^2} \, d\lambda_2(x, y) = \int_U \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^1 d\phi \\ &= \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu (ii)} \quad \int_{\Gamma} x^2 \, dS_{\Gamma} &= \int_U x^2 \cdot \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, d\lambda_2(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2(\phi) r^3 \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\phi \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi}_{=\pi} \cdot \int_0^1 r^2 \cdot r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr = \pi \left[r^2 \cdot \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^1 - \int_0^1 2r \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \, dr \\ &= \left[(5\sqrt{5})/12 - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{20} (1 + 4r^2)^{5/2} \right]_0^1 \right] \cdot \pi = \left[\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{12} - \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \right] \cdot \pi \\ &= \left[\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120} \right] \cdot \pi \end{aligned}$$

Mit $\tilde{v} := I \cdot I^{-1} v \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ gelten $v|_F = R \cdot \tilde{v}|_F$

und $\operatorname{div} \tilde{v} = 3$. Der Satz von Gauß

liefert daher

$$\int_{\overline{F}} \langle u, v \rangle dS_n = R \int_{\overline{F}} \langle u, \tilde{v} \rangle dS_n = R \int_{U(0,R)} \operatorname{div} \tilde{v} d\lambda_3$$

$$= 3 \cdot R \lambda_3(U(0,R)) = 4\pi R^4.$$