

Der halbe Zylindermantel wird parametrisiert durch

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}: K = (0, \pi) \times (1, 2) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, z) &\mapsto (2 \cos(\varphi), 2 \sin(\varphi), z)\end{aligned}$$

also $\bar{\Psi}(K) = F$

Wir erkennen $\bar{\Psi}$ gleich als Immersion und Einsetzung.

Der Rand ∂F zerfällt disjunkt in vier Teile

$R_i, i=1..4$, die wir einzeln parametrisieren.

$$\partial F = \bigcup_{i=1}^4 R_i$$

Der Satz von Stokes sagt dann:

$$\begin{aligned}\int_F \langle \operatorname{rot} A, v \rangle dS &= \int_{\partial F} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{R_i} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3\end{aligned}$$

Bestimmen wir zunächst die linke Seite:

$$\operatorname{rot} A = \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y + 2z - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor lautet

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(\varphi) \\ 2 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich $\int_F \langle \operatorname{rot} A, v \rangle dS = \int_K \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \cos(\varphi) \\ 2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda_2(\varphi, z) \right.$

$$= \int_K 4 \cdot z \sin(t) d\lambda_2(t, z) = 12$$

Nun parametrisieren wir den Rand in positiver Orientierung durch γ_i , $i=1..4$

$$\gamma_1, \gamma_3 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_1(t) = (t, 1), \quad \gamma_3(t) = (\pi - t, 2)$$

$$\gamma_2, \gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma_2(t) = (\pi, 1+t), \quad \gamma_4(t) = (0, 2-t)$$

$$\text{Dann ist } \underline{\Psi}(\gamma_1(t)) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 1)$$

$$\underline{\Psi}(\gamma_2(t)) = (2 \cos(\pi), 2 \sin(\pi), 1+t) = (-2, 0, 1+t)$$

$$\underline{\Psi}(\gamma_3(t)) = (2 \cos(\pi - t), 2 \sin(\pi - t), 2)$$

$$\underline{\Psi}(\gamma_4(t)) = (2 \cos(0), 2 \sin(0), 2-t) = (2, 0, 2-t)$$

$$\text{also } \frac{d}{dt} (\underline{\Psi} \circ \gamma_1)(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 0)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{\Psi} \circ \gamma_2)(t) = (0, 0, 1)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{\Psi} \circ \gamma_3)(t) = (2 \sin(\pi - t), -2 \cos(\pi - t), 0)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{\Psi} \circ \gamma_4)(t) = (0, 0, -1)$$

Somit erhalten wir

$$\int_{R_1} \sum_{i=1}^3 A_i dx_i = \int_0^\pi (2 \cdot \sin(t) + 1) \cdot (-2 \sin(t)) dt$$

$$+ \int_0^\pi 2 \cos(t) \cdot 2 \cos(t) dt + \int_0^\pi (1 + 4 \cos(t) \sin(t)) \cdot 0 dt$$

$$= \int_0^{\pi} -4 \cdot \sin^2(t) - 2 \cdot \sin(t) + 4 \cdot \cos^2(t) dt = -4$$

Analog erhalten wir

$$\int_{R_2} \sum_{i=1}^3 A_i dx_i = \int_0^1 (1+t) dt = \frac{3}{2}$$

$$\int_{R_3} \sum_{i=1}^3 A_i dx_i = \int_0^{\pi} 8 \sin^2(\pi-t) + 8 \sin(\pi-t) - 8 \cos^2(\pi-t) dt = 16$$

$$\int_{R_4} \sum_{i=1}^3 A_i dx_i = \int_0^1 (2-t) dt = -\frac{3}{2}$$

und insgesamt

$$\sum_{j=1}^4 \int_{R_j} \sum_{i=1}^3 A_i dx_i = -4 + \frac{3}{2} + 16 - \frac{3}{2} = 12$$

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla f, u \rangle d\lambda &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \underbrace{\partial_j f}_{\uparrow} \cdot \underbrace{u_j}_{\downarrow} d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\int_{\partial\Omega} u_j \cdot f \nu_j dS - \int_{\Omega} f \cdot \partial_j u_j d\lambda \right] \\ &= \int_{\partial\Omega} f \langle u, \nu \rangle dS - \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} u d\lambda \end{aligned}$$

Nun zur zweiten Gleichung

$$\int_{\Omega} \Delta g \cdot f d\lambda = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} (\partial_j \partial_j g) \cdot f d\lambda$$

nach Gleichung eins

$$= \sum_{j=1}^N \left[\int_{\partial\Omega} (\partial_j g) \cdot u_j \cdot f dS - \int_{\Omega} (\partial_j g) (\partial_j f) d\lambda \right]$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial n} g \right) \cdot f dS - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\lambda$$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ bezeichnet die äußere Flächennormale zu Ω .

Da $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$ und $\bar{\Omega}$ kompakt ist, gilt
 $\operatorname{div} F \in L^1(\mathbb{R}^4)$. Es ist $\operatorname{div} F(x, y, z) = 6xy^3$.

Wir erhalten mit dem Satz von Gauss:

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(x, y, z), \nu(x, y, z) \rangle dS$$

$$= \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) d\lambda_3 = 6 \int_{\Omega} xy^3 d\lambda_3$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} \int_{-\sqrt[6]{1-x^2-y^4}}^{\sqrt[6]{1-x^2-y^4}} 6xy^3 dz dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 12xy^3 \sqrt[6]{1-x^2-y^4} dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 -\frac{18}{7} x (1-x^2-y^4)^{7/6} \bigg|_{y=-\sqrt[4]{1-x^2}}^{y=\sqrt[4]{1-x^2}} dx$$

$$= 0.$$