

A5

05

Sei zunächst f integrierbar und $T: A_n \rightarrow \mathbb{R}$
eine Treppenfunktion mit $T(x) \leq |f(x)|$, $x \in A_n$.

Wir setzen T durch 0 auf Ω fort.

Dann gilt:

$$T(x) \leq |f(x)|, \quad x \in \Omega$$

T ist messbar

T ist Treppenfunktion

$$\Rightarrow \int_{\Omega} T \, d\mu \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$$

Das Integral über Treppenfkt., die unter f
in A_n liegen, ist also beschränkt. Also
ist f integrierbar.

Weiter gilt: $\chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k} |f| \leq |f| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \int_{A_k} |f| \, d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^n A_k} |f| \, d\mu \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu < \infty$$

Also konvergiert die Reihe.

Sei nun $f: A_n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und
die Reihe konvergiere.

Sei $(T_n, g)_{g \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende

Folge von Stufenfunktionen, die gegen
 f punktweise in A_n konvergiert.

Ist $(T_n, g)_{g \in \mathbb{N}}$ wieder die 0-Fortsetzung
auf Ω , erhalten wir wieder eine Stufenfkt.

14.11.14

Weiter gilt: $T_n := \sum_{j=1}^n T_{j,n} \leq f$

ist eine Stufenfkt., die monoton und
punktweise gegen f konvergiert.

Also ist f messbar.

Sei χ_B , $B \subset \Omega$ eine Elementarfkt.

$\chi_B \chi_{A_n}$ ist auch Elementarfkt.

$$\int_{\Omega} \chi_B d\mu = \mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \chi_B d\mu$$

Für eine Treppenfkt. $T \leq |f|$ folgt

$$\int_{\Omega} T d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} T d\mu \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |f| d\mu \leq K < \infty$$

beachte hierbei $\chi_{A_j} \cdot |T(x)| \leq f(x)$

Also ist auch das Supremum des Integrals
über Treppenfkt unter $|f|$ beschränkt.

$\Rightarrow |f|$ und somit auch f

ist integrierbar.

(i) F ist als stetige Funktion über dem Kompaktum

A integrierbar. Mit Fubini folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_A F d\lambda_3 &= \int_1^2 \int_2^3 \int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2} dz dy dx \\
 &= \int_1^2 \int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2} dy dx = \int_1^2 4 \left[-\left(\frac{1}{x+y} \right) \right]_2^3 dx \\
 &= \int_1^2 \frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3} dx = 4 \left(\ln(1x+21) - \ln(1x+31) \right) \Big|_1^2 \\
 &= 4 \cdot \left(\ln(4) - \ln(5) + \ln(4) - \ln(3) \right) = 4 \cdot \ln\left(\frac{16}{15}\right)
 \end{aligned}$$

(ii) Mit Fubini bestimmen wir

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^1 e^{-x-y} dy dx &= \int_0^1 \left[-e^{-x-y} \right]_x^1 dx \\
 &= \int_0^1 -e^{-x-1} + e^{-2x} dx = e^{-x-1} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 \\
 &= e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e^{-2} + 1) - e^{-1}
 \end{aligned}$$

Wir schneiden die Menge K_f in Schichten entlang der t -Achse: $K_{f,t} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,t) \in K_f\}$

Dann gilt

$$K_{f,t} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq f(t)\} & , t \in [a, b] \\ \emptyset & \end{cases}$$

und mit dem Prinzip von Cavalieri erhält man

$$\lambda_{n+1}(K_f) = \int_a^b \lambda_n(K_{f,t}) dt = c_n \int_a^b f(t)^n dt$$

Sei nun $f(t) := |t|$, $[-a, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$

Dann gilt

$$\lambda_{n+1}(K_f) = c_n \int_{-a}^{+a} |t|^n dt = 2c_n \int_0^a t^n dt = \frac{2c_n}{n+1} a^{n+1}$$

- (a) Nein, wähle $f = g = (\sqrt{x})^{-1} \cdot \chi_{[0,1]}$
- (b) Nein, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$
- (c) Ja, Monotonie oder majorisierte Konvergenz mit der Majorante $|f_1| + |f|$
- (d) Nein, $\mathbb{R} \notin \{A \subset \mathbb{R} \mid A = A \cap \mathbb{Z}\}$
- (e) Nein, es fehlen die Beträge.
Gegenbeispiel $f_n := -\frac{1}{x} \chi_{[\frac{1}{n}, 1]}$, $g = 0$
- (f) Ja, Summen und skalare Vielfache integrierbarer Funktionen sind integrierbar
- (g) Ja, wende den Satz von Fubini an.

(i) Hier ist $\operatorname{div} A = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ und in Kugelkoordinaten also $\operatorname{div} A = 3r^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_F A \, dF &= \int_M \operatorname{div} A \, d\lambda_3 = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \Theta \cdot 3r^2 \, d\varphi \, d\Theta \, dr \\ &= \frac{12}{5} \pi R^5 \end{aligned}$$

(ii) Der Rand ∂F der Fläche F wird nun

durch $h: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(\varphi) := 2(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$

parametrisiert, so dass

$$\begin{aligned} \int_F \operatorname{rot} A \, d\lambda_3 &\quad \text{bzw.} \quad \int_F \langle \operatorname{rot} A, \nu \rangle = \int_{\partial F} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (2 \cos(\varphi), 8 \cos^3(\varphi), -24 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)), (-2 \sin(\varphi), 2 \cos(\varphi), 0) \rangle d\varphi \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \cos^4(\varphi) \, d\varphi = 16 \left[\frac{1}{4} (\sin(\varphi) \cos^3(\varphi) + \frac{3}{2} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)) \right]_0^{2\pi} \\ &= 12 \cdot \pi \end{aligned}$$