

zu (!) D_N ist beschränkt und messbar, da offen. Außerdem gilt für alle $k=1, \dots, N$ und alle

$$\int_{\substack{x_k \in W_k \\ 1 - \frac{k-1}{N} \leq x_k < 1 - \frac{k}{N}}} \left(1 - \frac{k}{N} x_k \right) dx_k = - \frac{1}{N+1} \left(1 - \frac{k}{N} x_k \right) \Big|_{x_k=1-\frac{k}{N}}^{x_k=1-\frac{k-1}{N}}$$

$$= \frac{1}{N+1} \left(1 - \frac{k-1}{N} x_k \right)$$

Mit dem Satz von Fubini und einer Integration erhält man daher

$$\lambda_N(D_N) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 1 dx_N \dots dx_2 dx_1$$

$$= \frac{N!}{N!}$$

zu (!!!)

$$f_N(x) := \exp\left(\sum_{n=1}^N x_n\right) \text{ ist stetig und auf}$$

D_N beschränkt. Also ist $f_N \in L^1(D_N)$ und

der Satz von Fubini zusammen mit (!)

$$\text{liefert die Relation} \quad \int_{\substack{1 - \frac{k-1}{N} \leq x_1 < 1 - \frac{k}{N} \\ \dots \\ 1 - \frac{k-1}{N} \leq x_N < 1 - \frac{k}{N}}} f_N d\lambda_N = \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\left(\sum_{n=1}^N x_n\right) dx_N \dots dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-\sum_{n=1}^{N-2} x_n} (e - \exp(\sum_{n=1}^{N-1} x_n)) dx_{N-1} \dots dx_2 dx_1$$

$$= e \int_{D_{N-1}} 1 d\lambda_{N-1} - \int_{D_{N-1}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N-1} x_n\right) dx'$$

$$= e \lambda_{N-1}(D_{N-1}) - \int_{D_{N-1}} f_{N-1} d\lambda_{N-1}$$

$$= \frac{e}{(N-1)!} - \bar{I}_{N-1}$$

wobei $x' := (x_1 \dots x_{N-1})$

Eine kurze Induktion liefert dann

$$\bar{I}_N = e \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(-1)^{l+1}}{(N-l)!} + (-1)^{N-1} \bar{I}_1$$

mit $\bar{I}_1 = \int_0^1 e^t dt = e-1$ folgt

$$\bar{I}_N = -e \sum_{l=1}^N \frac{(-1)^l}{(N-l)!} + (-1)^N$$

$$= (-1)^N \left(1 - e \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(-1)^l}{l!} \right)$$

H(2) 08

Zum ersten Integral

$f(x, t) := \sin(x) \exp(-xt)$ ist stetig, also meßbar.

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\infty |\sin(x)| e^{-xt} dt dx &= \int_0^R |\sin(x)| \left(-\frac{1}{x} e^{-xt} \right) \Big|_0^\infty dx \\ &= \int_0^R \frac{|\sin(x)|}{x} dx < \infty \end{aligned}$$

da $|\sin(x)|/x \in L^1(0, R)$, denn $|\sin(x)| \leq |x|$
d.h. $|\sin(x)|/x$ ist auf $(0, R]$ beschränkt.

Nach dem Satz von Tonelli gilt also

$f \in L^1((0, R) \times \mathbb{R}_+)$. Folglich sind mit
dem Satz von Fubini die beiden iterierten

Integrale von f über $(0, R) \times \mathbb{R}_+$ gleich

$$\int_{(0, R) \times \mathbb{R}_+} f d\lambda_2 = \int_0^R \int_0^\infty \sin(x) e^{-xt} dt dx = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

denn $\sin(x)/x$ ist über $\mathbb{R}_+$ uneigentlich

$\mathbb{R}$ -integrierbar und zum anderen

$$\int_{(0, R) \times \mathbb{R}_+} f d\lambda_2 = \int_0^\infty \int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx dt$$

Integrieren wir zweimal partiell, ergibt sich

$$\int_0^R \sin(x) e^{-xt} dx = \frac{1 - (t \sin(R) + \cos(R) e^{-Rt})}{1 + t^2} \stackrel{H208}{=} \varphi_R(t)$$

Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt p.w.

$$\varphi_R(t) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1 + t^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{und}$$

$$|\varphi_R(t)| \leq \frac{2 + t e^{-t}}{1 + t^2} \leq \frac{3}{1 + t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

Wenden wir nun den Satz von Lebesgue an, erhalten wir schließlich

$$\int_{(0,R) \times \mathbb{R}_+} f d\lambda_2 = \int_0^R \varphi_R(t) dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \arctan(t) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

zum zweiten Integral:

Sei $f(x, y) := y \exp(-y^2(1+x^2))$. Dann

ist f stetig und daher meßbar sowie positiv auf $\mathbb{R}_+^2$. Nach ~~Tonelli~~ Tonelli

liegt f genau dann in $L^1(\mathbb{R}_+^2)$ wenn eines der beiden iterierten Integrale

in $\mathbb{R}$ existiert. Fubini rechtfertigt

dann die Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

Zunächst ist

H2 08

$$\int_0^A \int_0^A f(x, y) dy dx = \int_0^A \frac{1}{2(1+x^2)} \exp(-y^2(1+x^2)) \Big|_0^A dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Andererseits erhalten wir mit der Substitution

$$t(x) := yx$$

$$\int_0^A \int_0^A f(x, y) dx dy = \int_0^A \exp(-y^2) \int_0^A y \exp(-y^2 x^2) dx dy$$
$$= \int_0^A \exp(-y^2) \int_0^A \exp(-t^2) dt dy$$
$$= \left(\int_0^\infty \exp(-t^2) dt \right)^2$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wir benutzen die Formel aus dem Satz

$$\begin{aligned} \int_B \|x\|^2 d\lambda_n(x) &= u \cdot c_n \int_0^1 r^d \cdot r^{n-1} dr \\ &= u \cdot c_n \int_0^1 r^{d+n-1} dr. \end{aligned}$$

Das letzte Integral existiert genau dann, wenn $d + n - 1 > -1$ ist, d.h. $d > -n$.

In diesem Fall ist

$$\int_B \|x\|^2 d\lambda_n(x) = u \cdot c_n \frac{1}{d+n}$$

Analog

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \|x\|^2 d\lambda_n(x) = u \cdot c_n \int_1^\infty r^{d+n-1} dr < \infty$$

$$\Leftrightarrow d + n - 1 < -1 \quad \Leftrightarrow d < -n$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \|x\|^2 d\lambda_n(x) = u \cdot c_n \frac{1}{-d-n}.$$

$$\Pi := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x \leq 0 \text{ oder } |y| \leq x) \}$$

Wir bestimmen für $x \in \mathbb{R}$

$${}_x\Pi := \{ y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Pi \}$$

$${}_x\Pi = \begin{cases} \emptyset & \text{für } |x| > 1 \\ [-\sqrt{1-x^2}, +\sqrt{1-x^2}] & \text{für } x \in [-1, 0] \vee x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \\ [-x, x] & \text{für } x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

und damit

$$\lambda_1({}_x\Pi) = \begin{cases} 0 & , |x| > 1 \\ 2\sqrt{1-x^2} & , x \in [-1, 0] \vee x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \\ 2x & , x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist also

$$\lambda_2(\Pi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1({}_x\Pi) d\lambda_1(x)$$

$$= \int_{[-1, 0]} 2\sqrt{1-x^2} d\lambda_1(x) + \int_{(0, \frac{\sqrt{2}}{2})} 2x d\lambda_1(x) + \int_{[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} 2\sqrt{1-x^2} d\lambda_1(x)$$

$$= \int_{-\pi/2}^0 1 + \cos(2u) du + x^2 \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos(u)) du$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{4}$$