

$$1) \quad K = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \}$$

$$2) \quad K = \{ (r \sin \phi, r \cos \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq z \leq 2, 0 \leq r \leq z, 0 \leq \phi \leq 2\pi \}$$

$$3) \quad K = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \max \{ |x_1|, |x_2|, |x_3| \} \leq 2 \}$$

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$

Setzen wir ${}_{(x,y)}K := \{ z \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in K \}$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so ist

$${}_{(x,y)}K = \begin{cases} [0, 6x^2 + 2y^2] & \text{falls } (x,y) \in A \\ \emptyset & \text{falls } (x,y) \notin A \end{cases}$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri und dem Satz von Fubini erhalten wir also

$$\begin{aligned} \lambda_3(K) &= \int_A \lambda_1({}_{(x,y)}K) d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_A \lambda_1([0, 6x^2 + 2y^2]) d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_A (6x^2 + 2y^2) d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1-y]} (6x^2 + 2y^2) d\lambda_1(x) d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0,1]} [2x^3 + 2xy^2] \Big|_{x=0}^{x=1-y} d\lambda_1(y) \\ &= \int_{[0,1]} (2(1-y)^3 + 2(1-y)y^2) d\lambda_1(y) \\ &= \left[-\frac{1}{2}(1-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 \right] \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch das dreifache Integral

$$\lambda_3(u) = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{6x^2+2y^2} 1 \, dz \, dx \, dy$$

berechnen.

Zum zweiten Integral:

Mit Fubini

$$\int_A (2x+y) \, d\lambda_2(x,y) = \int_{[0,1] \times [0,1]} \chi_A \cdot (2x+y) \, d\lambda_2(x,y)$$

$$= \int_{[0,1]} \int_{[0, \sqrt{1-y^2}]} (2x+y) \, d\lambda_1(x) \, d\lambda_1(y)$$

$$= \int_{[0,1]} [x^2 + xy] \Big|_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \, d\lambda_1(y)$$

$$= \int_{[0,1]} (1-y^3 + y\sqrt{1-y^2}) \, d\lambda_1(y)$$

$$= \left[y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} (1-y^2)^{3/2} \right] \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

f ist Lebesgue-integrierbar nach 3.10

da aus $g(x) \in f(x) \leq h(x)$ f.ü. gilt Ugl

$$|f| \leq |g(x)| + |h(x)| \quad \text{f.ü.} \quad \text{folgt.}$$

17: + 18:00 folgt:

$$\int f dx - \int g dx = \int (f - g) dx \leq \int (f - g)_+ dx \leq \int (f - g)_+ dx \leq \int (f - g)_+ dx$$

$$= \int (f - g)_+ dx = \int (f - g)_+ dx$$

$$\Rightarrow \int f dx \leq \int (f - g)_+ dx$$

Analog:

$$\int h dx - \int f dx = \int (h - f) dx \leq \int (h - f)_+ dx \leq \int (h - f)_+ dx$$

$$= \int (h - f)_+ dx + \int (f - h)_+ dx$$

$$= \int (h - f)_+ dx + \int (f - h)_+ dx$$

$$\Rightarrow \int f dx \leq \int h dx$$

$$\text{Also muss} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx = \int f dx$$

gelten.

Der Satz von Fubini ist natürlich richtig.

Zur Aufgabe: Es gilt $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (0,1)^2} f = 0$

d.h. $\text{supp } f \subset [0,1]^2$. Für $x, y \in (0,1)$

und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $x > \frac{1}{k}$, $y > \frac{1}{l}$ gelte

$$\chi_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}(x) = 0 = \chi_{[\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}]}(y)$$

für alle $n > \max\{k, l\} =: N$, d.h.

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^N (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Also ist f in einer Umgebung eines jeden

Punktes $(x, y) \in (0,1)^2$ eine einfache Funktion

und damit als punktweise Grenzwert messbar

(sogar einfacher) Funktionen messbar. weiter:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \lambda_n = n(n+1) \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} 1 d\lambda_n = n(n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^N (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y) \quad (A)$$

(genauer helfen hier: Summation auf)

$$\text{und also } \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \sum_{n=1}^N g_n(y) \int_{\mathbb{R}} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) dx = \sum_{n=1}^N g_n(y) (1-1) = 0$$

Was somit $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = 0$ ergibt.

Sei andererseits $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wie eben folgt die Darstellung (A) (mit höchstens vier Summanden) und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) \int_{\mathbb{R}} g_n(y) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) \\ &= g_1(x) - \lim_{N \rightarrow \infty} g_{N+1}(x) = g_1(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx = 1$$

Damit kann f nach dem Satz von Fubini nicht zu $L^1(\mathbb{R}^2)$ gehören, d.h. hier ist $|f|$ meßbar aber es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda_2 = +\infty$$