

Sei also $B \subset \mathbb{R}^2$ messbar und

$$\tilde{B} := \left\{ \tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b \in B \right\}$$

so wie $s := \begin{pmatrix} m \\ h \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{R}_+$

$$C := C(B, s) := \left\{ (1-\tau)\tilde{b} + \tau s \mid b \in B, \tau \in (0,1) \right\}$$

Nun ist $\Omega := \mathbb{R}^2 \times (0,1)$ offen und

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\longrightarrow \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^{2*} \times (0, h) \subset \mathbb{R}^3 \\ (b, \tau) &\longmapsto (1-\tau)\tilde{b} + \tau s \end{aligned}$$

eine injektive C^∞ -Abbildung.

Ferner gilt:

$$J_{\Phi}(b, \tau) = \begin{bmatrix} (1-\tau) \text{id}_{\mathbb{R}^2} & m-b \\ 0 & h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$\det J_{\Phi}(b, \tau) = (1-\tau)^{2*} \cdot h > 0,$$

d.h. Φ ist ein lokaler und damit

auch globaler (Injektivität) C^∞ -Diffeomorphismus.

Nach dem Transformationssatz mit der Substitution $x = \Phi(b, \tau)$ und mit

dem Satz von Fubini folgt dann für
alle $f \in L^1(C)$ (oder alle meßbare
 f , deren Integral über C erklärt ist):

$$\int_C f d\lambda_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_C f d\lambda_3 = \int_{\Phi(\Omega)} \chi_C f d\lambda_{n+1}$$

$$= \int_{\Omega} \chi_C \circ \Phi(b, \tau) \cdot f \circ \Phi(b, \tau) |\det \underline{J}_{\Phi}(b, \tau)| db d\tau$$

$$= h \int_{(0,1)} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_C \circ \Phi(b, \tau) \cdot f \circ \Phi(b, \tau) db (1-\tau)^2 d\tau$$

$$= h \int_{(0,1)} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(b) \cdot f \circ \Phi(b, \tau) db (1-\tau)^2 d\tau$$

$$= \int_{(0,1)} \int_B f \circ \Phi(b, \tau) db (1-\tau)^2 d\tau$$

wobei wir $\Phi(b, \tau) \in C \Leftrightarrow b \in B$

für $\tau \in (0,1)$ benutzt haben.

Speziell für $f = 1$ erhalten wir

$$\lambda_3(C) = \int_C 1 d\lambda_3 = h \int_{(0,1)} \int_B 1 db (1-\tau)^2 d\tau$$

$$= h \lambda_2(B) \int_{(0,1)} (1-\tau)^2 d\tau = \frac{h}{3} \lambda_2(B)$$

H1 U9

Im ersten Sonderfall gilt mit $\Pi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid b_1^2 + 4b_2^2 < 1 \right\}$$

$$= \left\{ b \in \mathbb{R}^2 \mid |\Pi b|^2 < 1 \right\}$$

$$= \Pi^{-1} U(0, 1), \text{ also}$$

$$\lambda_2(B) = \lambda_2(\Pi^{-1} U(0, 1))$$

$$= |\det \Pi^{-1}| \lambda_2(U(0, 1)) = \frac{\sqrt{u}}{2}$$

$$\text{d.h. } \lambda_3(C) = \frac{\sqrt{u}}{3}$$

Im zweiten Fall erhalten wir wegen

$$\lambda_2(B) = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3(C) = \frac{4}{3}.$$

Wir betrachte zuvörderst $A_+ := A \cap \mathbb{R}_+^2$.

Mit $\bar{\Phi}(x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ gilt dann

$$A_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^2 : |\bar{\Phi}(x)|^2 < a^{2/3} \right\} = \bar{\Phi}^{-1}(U_+)$$

wobei $U_+ := U(0, a^{1/3}) \cap \mathbb{R}_+$ und

$$\psi := \bar{\Phi}^{-1} : U_+ \rightarrow A_+ \\ x \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Bestimmen wir $J_\psi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$, so liefert der

Transformations Satz (mit $y = \psi(x)$)

$$\lambda_2(A_+) = \int_{A_+} 1 d\lambda_2 = \int_{U_+} (x_1 x_2)^2 dx$$

Mit Polar Koordinaten und dem Satz von

Fubini: $x = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$ erhalten wir

$$\lambda_2(A_+) = \int_0^{a^{1/3}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot r d\varphi dr$$

M2 09

denk $\phi : (0, a^{1/3}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow U_+$

$$(r, \varphi) \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist ein C^1 -Diffeomorphismus.

Schließlich ist $\lambda_2(A_+) = \frac{9}{4} \int_0^{a^{1/3}} r^5 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) d\varphi$

$$= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{\pi} \sin^2(t) dt$$

$$= \frac{3}{32} \pi a^2$$

denk $2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$.

Da $x \in A \Leftrightarrow (\pm x_1, \pm x_2) \in A$ gilt, haben wir, z. B. mit der Transformation $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2(A \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-)) = \int_{A \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-)} 1 d\lambda_2$$

$$= \int_{A \cap \mathbb{R}_+^2} 1 d\lambda = \lambda_2(A_+)$$

Ebenso $\lambda_2(A \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)) = \lambda_2(A \cap \mathbb{R}_-^2) = \lambda_2(A_+)$

Nun ist $A \setminus ((A \cap \mathbb{R}_+^2) \cup (A \cap \mathbb{R}_-^2) \cup (A \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)) \cup (A \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-)))$ eine Nullmenge und also

$$\lambda_2(A) = 4 \cdot \lambda_2(A_+) = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

Mit $z \in \mathbb{R}$ ist

$$\Pi_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right\}$$

Also ist $\Pi_z = \emptyset$ wenn $|z| > c$

$$\Pi_z = \{(0, 0)\} \text{ wenn } |z| = c$$

$$\Pi_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a\sqrt{1 - (\frac{z}{c})^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{1 - (\frac{z}{c})^2}}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

wenn $|z| < c$.

Letztes ist eine Ellipse. Deren Flächeninhalt

$$\text{ist } \lambda_2(\Pi_z) = \pi \cdot a \sqrt{1 - (\frac{z}{c})^2} \cdot b \cdot \sqrt{1 - (\frac{z}{c})^2} = \pi ab \left(1 - (\frac{z}{c})^2\right)$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir

$$\lambda_3(\Pi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(\Pi_z) d\lambda_1(z) = \int_{[-c, c]} \pi \cdot a \cdot b \left(1 - (\frac{z}{c})^2\right) d\lambda_1(z)$$

$$= \pi ab \int_{-c}^c \left(1 - (\frac{z}{c})^2\right) dz = \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_{-c}^c$$

$$= \pi ab \left(2c - \frac{2c}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} abc$$

$$\int_{\mathbb{R}} z \in \mathbb{R}.$$

$$(i) \quad \Pi_z = \emptyset \quad \text{falls} \quad |z| > 1$$

$$(ii) \quad \Pi_z = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\} \quad \text{falls} \quad |z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_2(\Pi_z) = \frac{\pi}{2}$$

$$(iii) \quad \Pi_z = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - z^2 \right\}$$

$$\text{falls} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < |z| \leq 1.$$

$$\lambda_2(\Pi_z) = \pi(1 - z^2)$$

Also erhalten wir :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Pi) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(\Pi_z) d\lambda_1(z) \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\pi}{2} dz + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi(1 - z^2) dz + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \pi(1 - z^2) dz \end{aligned}$$

$$= \pi \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1$$

$$= \pi \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} (4 - \sqrt{2})$$