

mit den gegebenen Definitionen berechnen wir

die gewünschte Ausdrücke.

$$(i) \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{div}(\nabla \times v) = \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \\ \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 \\ -(\partial_1 v_3 - \partial_3 v_1) \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$= \partial_1 (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \partial_2 (-(\partial_1 v_3 - \partial_3 v_1)) + \partial_3 (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = \partial_1 \partial_2 v_3 - \partial_1 \partial_3 v_2 - \partial_2 \partial_1 v_3 + \partial_2 \partial_3 v_1 + \partial_3 \partial_1 v_2 - \partial_3 \partial_2 v_1$$

$$= 0$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt für zweimal stetig diff'bare Funktionen

$$\partial_i \partial_j v_k = \partial_j \partial_i v_k$$

$$(ii) \operatorname{rot} \operatorname{grad} v = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{pmatrix} = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_2 v - \partial_2 \partial_1 v \\ \partial_2 \partial_3 v - \partial_3 \partial_2 v \\ \partial_3 \partial_1 v - \partial_1 \partial_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ weil der Satz von Schwarz.}$$

$$(iii) \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{pmatrix} = \partial_1 (\partial_1 v) + \partial_2 (\partial_2 v) + \partial_3 (\partial_3 v) = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 v =: \Delta v.$$

Anmerkung: In allen drei Fällen muss v zweimal stetig diff'bar sein.

(1) Die Abbildung $\varphi(x, y)$ ist eine Immersion, da $\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$ und $\text{rang } \varphi'(x, y) = 2$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Da die Abbildung $\phi: (x, y) \mapsto (2x+3y, x-y)$ injektiv ist, ist auch φ injektiv.

Weiter ist auch $\phi^{-1}(t, s) \mapsto \frac{1}{5}(t+3s, t-s)$ stetig.

Da $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $p(t, s, u) = (t, s)$ stetig ist, ist auch $\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ p$ stetig.

Also ist φ auch eine Einbettung.

Nach Satz 5.4 ist also $\varphi(U)$ eine 2-dimensionale UMF des $\mathbb{R}^3$.

(2) $\varphi(x, y)$ ist eine Immersion da

$$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \\ \sin(y) & x \cos(y) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(y) & -x \sin(y) \\ \sin(y) & x \cos(y) \end{vmatrix} = x \neq 0$$

Also $\text{rang } \varphi'(x, y) = 2$ für $(x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi)$.

Betrachte wieder $\phi: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \cos(y) \\ x \sin(y) \end{pmatrix}$

ϕ ist injektiv und somit auch φ .

Weiter ist ϕ^{-1} diff'bar und damit auch

stetig auf $\phi((0, 1) \times (0, \pi))$ [det $\phi'(x, y) = x \neq 0$]

p2 um

Viele betrachten wir die Projektion auf die erste beiden Komponenten, genauer

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad p(t, s, u) = (t, s)$$

p ist stetig und somit auch

$$\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ p.$$

$\Rightarrow \varphi$ ist eine Immersion und Einbettung. Somit ist $\varphi(U)$ 2-dim. UNF von $\mathbb{R}^3$.

$$(3) \quad \varphi'(t) = (4 \cdot t, \sin(2t), -\cos(2t)).$$

$$\Rightarrow \text{rang } \varphi'(t) = 1 \quad \text{für } t \neq 0.$$

Aber, φ ist keine Einbettung, da

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \quad \text{also nicht injektiv ist.}$$

$\Pi = \varphi(U)$ ist trotzdem eine UNF von

$\mathbb{R}^3$, da die Einschränkung $\varphi|_{(0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}^3$

eine Immersion und eine Einbettung ist

und weiter $\varphi(U) = \varphi((0, \infty))$ gilt.

(1) Sei $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Definiere

$$\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, x \cdot y) \quad \text{ist}$$

eine Parametrisierung von

$$\Pi := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy, (x, y) \in A \}$$

$$\text{Weiter ist } \det(\mathcal{F}_\phi^T \cdot \mathcal{F}_\phi) = 1 + x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \int_\Pi (\Pi) = \int_A \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

(2) Analog zu (1) definiere $A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x^2 > y > 0 \}$,
 $2x+3y+4$

dann ist $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y, \text{~~z~~})$ Parametrisierung
 von $\Pi := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x + 3y + 4, (x, y) \in A \}$

$$\text{Weiter } \det(\mathcal{F}_\phi^T \cdot \mathcal{F}_\phi) = 14$$

$$\Rightarrow \int_\Pi (\Pi) = \int_A \sqrt{14} \, dx \, dy = \sqrt{14} \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} 1 \, dy \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{14}$$

(3) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq x \}$

$$\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

ist Parametrisierung von

$$\Pi := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{1-x^2-y^2}, (x, y) \in A \}$$

$$\text{Weiter } \det(\mathcal{F}_\phi^T \cdot \mathcal{F}_\phi) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \int_\Pi (\Pi) = \int_A \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{\cos(t)} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \, dt$$

$$= - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{1-r^2} \Big|_0^{\cos(t)} \, dt = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 \cdot |\sin(t)| \, dt = \pi - 2$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2, a < x < b \}$$

$$\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \quad \text{ist}$$

Parametrisierung von

$$\Pi' := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a < x < b, z > 0 \}$$

und $\Pi \setminus \Pi'$ ist eine Nullmenge.

$$\text{Ferner } \det(\mathcal{J}_\phi^T \cdot \mathcal{J}_\phi) = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Pi} (1) = \int_A \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= R \int_a^b \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy dx$$

$$= R \int_a^b \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} dy$$

$$= R \cdot \pi (b - a)$$