

Für alle $y \in [-1, 1]$ ist $f(x, y)$ bezüglich x auf $[-1, 1]$ stetig. Also existiert das Integral $\int_{-1}^1 f(x, y) dx$ für alle $y \in [-1, 1]$ und ist gleich Null, da $f(x, y)$ für alle $y \in [-1, 1]$ ungerade ist.

$$\text{Also auch } \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = 0$$

$$\text{Analog folgt } \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx = 0$$

Angenommen, $f(x, y)$ ist auf $[-1, 1]$

Lebesgue-integrierbar. Dann ist f auch auf $[0, 1] \times [0, 1]$ integrierbar.

Aus Fubini folgt daher, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \text{ existieren muss.}$$

$$\text{Aber } \varphi(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \frac{1}{2y(y^2+1)}, \quad y \in (0, 1]$$

ist nicht integrierbar auf $[0, 1]$.

Dies ist ein Widerspruch.

P2 U8

1) Sei $A = (0, 2\pi) \times (0, 2)$ und $\varphi(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t))$

Dann ist $B \setminus \varphi(A)$ eine Nullmenge und

$$\text{damit} \quad \int_B \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_{\varphi(A)} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

Die Funktion $\varphi: A \rightarrow \varphi(A)$ ist ein Diffeomorphismus, da φ injektiv ist und $\det \varphi'(t, r) = r \neq 0$ für $(t, r) \in A$.

Nach der Transformationsformel erhalten wir

$$\int_{\varphi(A)} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_A \sin(r^2) \cdot r dt dr$$

Der Satz von Fubini liefert dass

$$\begin{aligned} \int_A \sin(r^2) \cdot r dt dr &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r \cdot \sin(r^2) dt dr \\ &= \pi (\cos(1) - \cos(4)) \end{aligned}$$

2) Die Argumente laufen analog zu (1) mit $A = (0, \pi) \times (0, 1)$ und $\varphi(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t))$

Transformationsformel und Fubini liefern

$$\begin{aligned} \int_B \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{\varphi(A)} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \int_A \frac{r^4 \sin^2(t) \cos^2(t)}{r^2} r dt dr \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^3 \sin^2(t) \cos^2(t) dr \right) dt = \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

3) Sei $\varphi(t, r) = (2r \cos(t), r \sin(t))$

und $A = (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Wieder ist $B \setminus \varphi(A)$ Nullmenge

$$\det \varphi'(t, r) = -2r \neq 0$$

Also

$$\int_B x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_{\varphi(A)} x^2 + y^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_A (4r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)) 2r \, dt \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 (1 + 3 \cos^2(t)) \, dr \, dt$$

$$= \frac{5\pi}{2}$$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, a], \quad -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

Also erhalten wir

$$\Pi_x = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E \right\}$$

$$= \left[-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]$$

und somit

$$\lambda^2(E) = \int_{[-a, a]} \lambda_1(\Pi_x) \lambda_1(x)$$

$$= \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_0^a 4b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{4b}{a} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a$$

$$= \pi \cdot a \cdot b$$

PS 08

Die Funktion $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist nicht negativ.

Wir wollen den Satz von Fubini anwenden.

Für $z \in [0, 2]$ bezeichne $B_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$

Dann ist $\int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$

$$= \int_0^2 \left(\int_{B_z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \right) dz$$

Sei nun $\varphi(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t))$

$$A_z = (0, 2\pi) \times (0, z)$$

Dann ist $B_z \setminus \varphi(A_z)$ eine Nullmenge.

Also

$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z \sqrt{r^2 + z^2} \, r \, dr \, dt \, dz$$

$$= \int_0^2 \frac{2\pi (2\sqrt{z^2} - 1)}{3} z^3 \, dz = \frac{8}{3} \pi (2\sqrt{2} - 1)$$

P3 08

Wir sehen : $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$

Sei $A = \left\{ (t, r) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, 0 < r < \cos(t) \right\}$

Mit $\varphi(t, r) = (r \cos(t), r \sin(t))$ folgt

$$\int_B x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_A r^2 \cdot r \, dt \, dr$$

$$= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{\cos(t)} r^3 \, dr \, dt = \frac{3\pi}{32}$$

Aus P3 U6 wissen wir:

Für jedes $A \in \mathbb{R}^p$, A L -messbar gilt

$$\begin{aligned}\lambda^p(A) &= \inf \{ \lambda^p(U) \mid U \supset A, U \text{ offen} \} \\ &= \sup \{ \lambda^p(F) \mid F \subset A, F \text{ abgeschlossen} \}.\end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst

$$\lambda^p(A) = \sup \{ \lambda^p(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt} \}$$

Bew.: Sei hierzu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \lambda^p(A)$. Dann
gibt es ein abgeschlossenes $F \subset A$ (P3 U6) mit
 $\lambda^p(F) > \alpha$.

$K_n := F \cap [-n, n]^p$ ist kompakt und

es gilt $K_n \uparrow F$, also $\lambda^p(K_n) \uparrow \lambda^p(F) > \alpha$

Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^p(K_n) > \alpha$.

zu (ii) Sei also OBdA A kompakt, $\lambda^P(A) > 0$.

Nach P3 U6 gibt es ein U (offen) $\supset A$ mit

$$\lambda^P(U) < 2 \lambda^P(A). \quad \text{Das nicht-leere}$$

Kompaktum hat von der nicht-leeren abgeschlossenen

Menge U^c mit $A \cap U^c = \emptyset$ einen positiven

Abstand: $\delta := \inf \{ \|x - y\| \mid x \in A, y \in U^c \} > 0$.

Dieses δ leistet das Verlangte:

Sei $t \in \mathbb{R}^p$, $\|t\| < \delta$. Für jedes $x \in A$ ist

dann $x + t \in U$, denn wäre $y := x + t \in U^c$

so wären $x \in A$, $y \in U^c$ zwei Punkte mit

$\|x - y\| = \|t\| < \delta$ im Widerspruch zur Def. von δ .

Daher gilt: $A \cup (A + t) \subset U$. Weiter ist

A kompakt und es gilt

$$\lambda^P(A + t) = \lambda^P(A)$$

Angenommen: $A \cap (A + t) = \emptyset$

Dann erhielten wir

$$\lambda^P(U) \geq \lambda^P(A) + \lambda^P(A + t) = 2 \cdot \lambda^P(A)$$

im Widerspruch zur Wahl von U . Es folgt:

Für jedes $t \in \mathcal{U}_\delta(0)$ ist $A \cap (A + t) \neq \emptyset$

Daher gilt: $\mathcal{U}_\delta(0) \subset A - A$.