

$$(1) \text{ Setze } f_n(x) := \sum_{j=1}^n g_j(x) \quad \text{mit}$$

Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt sofort

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X g_j(x) d\lambda$$

Da die rechte Seite endlich ist, muss $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ λ -integrierbar sein, mithin fast überall endlich.

$$(2) \text{ Sei } g_n(x) := \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x - q_n|}} \quad g_n \text{ ist}$$

positiv & messbar (g_n ist f.ü. stetig)

$$\text{Wir zeigen: } \sum_{j=1}^{\infty} \int_{[0,1]} g_j(x) d\lambda < \infty$$

Dann folgt die Behauptung aus (1).

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x - q_n|}} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 4$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 g_j(x) dx \leq 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 4$$

(a) Mit dem Satz von Fubini schreiben wir das Integral in ein iteriertes Integral um

$$\begin{aligned}
 \int_A f \, d\lambda_2 &= \int_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2) \, d\lambda_2(x, y) \\
 &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2 + y^3 + 2xy^2) \, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\
 &= \int_{[0,1]} \left(\frac{x^3}{3} + xy^3 + x^2y^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} d\lambda_2(y) \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{3} + y^3 + y^2 \, dy \\
 &= \left[\frac{y}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

(b) Wieder mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\int_A (xy - 3 \cos(x+y)) \, d\lambda_2(x, y) \\
 &= \int_{[0,\pi] \times [0,\pi]} \chi_A(x, y) \cdot (xy - 3 \cos(x+y)) \, d\lambda_2(x, y) \\
 &= \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi-y]} xy - 3 \cos(x+y) \, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y)
 \end{aligned}$$

P2 U07

$$= \int_{[0, \bar{u}]} \left(\frac{x^2 y}{2} - 3 \sin(x+y) \right)_{x=0}^{x=\bar{u}-y} d\lambda_1(y)$$

$$= \int_0^{\bar{u}} \left(\frac{(\bar{u}-y)^2 y}{2} + 3 \sin(y) \right) dy$$

$$= \int_0^{\bar{u}} \frac{\bar{u}^2 y}{2} + \frac{y^3}{2} - \bar{u} y^2 + 3 \sin(y) dy$$

$$= \frac{\bar{u}^2 y^2}{4} - \frac{\bar{u} y^3}{3} + \frac{y^4}{8} - 3 \cos(y) \Big|_0^{\bar{u}}$$

$$= \frac{\bar{u}^4}{4} - \frac{\bar{u}^4}{3} + \frac{\bar{u}^4}{8} + 6 = \frac{\bar{u}^4}{24} + 6$$

1) Die Funktion $x \mapsto \phi(x-t) \cdot f(t)$ ist diff'bar für alle t . Da $\partial_x \phi$ stetig ist und $\partial_x \phi = 0$ für $|x| > R$ gibt es $C > 0$ mit

$$|\partial_x (\phi(x-t) \cdot f(t))| = |\partial_x \phi(x-t) \cdot f(t)| \leq C |f(t)|$$

$C \cdot |f(t)|$ ist integrierbar.

Somit ist die Funktion $\mp \phi(f)$ diff'bar.

2) Wir können mit Satz 3.16 (alle Fall.

sind stetig) das Integral als R-Integral auffassen, für welches wir die Substitutions

regel benutzen.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \phi\left(\frac{x-t}{s}\right) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(s) f(x-ts) ds$$

Da f stetig ist, folgt für $\delta \rightarrow 0$ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi(s) f(x-ts) = \phi(s) f(x)$

Da f und ϕ auf $[-R, R]$ beschränkt sind,

haben wir eine Majorante $\chi_{[-R, R]} \cdot C$.

Also folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\mp \phi_s(f)(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi(s) f(x) ds = f(x) \int_{\mathbb{R}} \phi(s) ds = f(x)$$