

A1 Die Mengen aller Polynome

$$P_n := \left\{ x \mapsto \sum_{u=0}^n \alpha_u x^u, \alpha = (\alpha_0 \dots \alpha_n) \in \mathbb{Q}^{n+1} \right\}$$

höchstens  $n$ -ten Grades mit rationalen Zahlen  
sind abzählbar, denn  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}^{n+1}$  sind  
abzählbar.

Nach Aufgabe G1 ist dann auch

$$P := \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$$

als abzählbare Vereinigung abzählbarer  
Mengen abzählbar.

Jedes  $p \in P_n$  besitzt höchstens  $n$  Nullstellen,  
so dass die Menge aller Nullstellen  
aller Polynome aus  $P_n$

$$A_n := \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \exists p \in P_n \text{ mit } p(a) = 0 \right\}$$

wieder abzählbar ist.

Mit G1 wiederum ist dann auch

die Menge der algebraischen Zahlen

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

abzählbar.

A2

Es ist

$$S = \{ \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \\ \{1, 2, 4\}, \{3, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$$

Damit  $f$  messbar ist, muss für  
alle  $a \in \mathbb{R}$   $f^{-1}(-\infty, a) \in S$  gelten.

Sei  $f(x) = (x-3)^2$

$$f(1) = 4 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 0 \quad f(4) = 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-\infty, a) = \begin{cases} \emptyset & a \leq 0 \\ \{3\} & 0 < a \leq 1 \\ \{2, 3, 4\} & 1 < a \leq 4 \\ X & a > 4 \end{cases}$$

Also ist  $f$  messbar.

Sei  $f(x) = \left| x - \frac{7}{2} \right|$

$$f(1) = \frac{5}{2} \quad f(2) = \frac{3}{2} \quad f(3) = \frac{1}{2} \quad f(4) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-\infty, a) = \begin{cases} \emptyset & a \leq \frac{1}{2} \\ \{3, 4\} & \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2} \\ \{2, 3, 4\} & \frac{3}{2} < a \leq \frac{5}{2} \\ X & a > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Da  $\{3, 4\} \notin S$ , ist  $f$  nicht  
messbar

AS

1. Sei  $\mathcal{M} := \cap \mathcal{A}$

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$  da  $\emptyset \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}$

2. Sei  $A \in \mathcal{M}$ . Dann ist  $A \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}$ . Dann ist auch  $X \setminus A \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}$ .

3. Sei  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ . Dann ist  $A_k \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Also  $\cup A_k \in \mathcal{A}$  für alle  $\mathcal{A}$  und somit  $\cup A_k \in \mathcal{M}$ .

2. 1.  $\emptyset \in \mathcal{S}_Y$  da  $\emptyset = \emptyset \cap Y$

2. Sei  $A \in \mathcal{S}_Y$ . Dann ist  $A = E \cap Y$ ,  $E \in \mathcal{S}$

$\Rightarrow Y \setminus A = Y \cap (X \setminus E) \in \mathcal{S}_Y$

3. Sind  $A_k \in \mathcal{S}_Y$  gibt es  $E_k$  mit  $A_k = E_k \cap Y$   
und  $E_k \in \mathcal{S}$ .

$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} (E_k \cap Y) = Y \cap \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}_Y$

3. Gegenbeispiel:  $X = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{S}_1 = \{ \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X \}$

$\mathcal{S}_2 = \{ \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X \}$

Dann ist  $\{1\}, \{3\} \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$

aber  $\{1, 3\} \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$