

Es seien S_k , $k \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Behauptung: $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ abzählbar

$$S_k = \{ S_{k\ell} \mid \ell \in \mathbb{N} \}$$

$$S_{11} \quad S_{22} \quad S_{13} \quad S_{14} \quad \dots$$

$$S_{21} \quad S_{22} \quad S_{23} \quad S_{24} \quad \dots$$

$$S_{31} \quad S_{32} \quad S_{33} \quad \dots$$

$$(1, 1) \quad (1, 2) \quad (1, 3)$$

$$(2, 3) \quad (2, 2)$$

$$(3, 1)$$

$$\mathcal{C}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto m + \sum_{\ell=1}^{k-2} \ell, \quad k := n+m$$

Wir zeigen: $\mathcal{C}$ ist bijektiv.

Da $\mathbb{N}$ abzählbar ist, ist dann auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und damit S abzählbar.

$$\varphi(u, m) = m + \frac{1}{2}(u+m-2)(u+m-1)$$

Seien $(u, m), (v, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\text{und } \varphi(u, m) = \varphi(v, \mu)$$

Folgt dann $u = v$ und $m = \mu$?

$$\text{Setze } k := u + m, \quad K := v + \mu$$

Zeige zunächst $k = K$

Annahme: $k \neq K$, oBdA $k > K$

Es ist $1 \leq m \leq k-1$ und $1 \leq \mu \leq K-1$

$$\Rightarrow 0 = \varphi(u, m) - \varphi(v, \mu)$$

$$= \frac{1}{2}[(k-2)(k-1) - (K-2)(K-1)] + m - \mu$$

$$> \frac{1}{2}[\dots] + 1 - (K-1)$$

$$= \frac{1}{2}[k^2 - 3k + 2 - K^2 + 3K - 2] + 1 - (K-1)$$

$$= \frac{1}{2}[k^2 - 3k - K^2 + 3K - 2K + 4]$$

$$= \frac{1}{2}[k^2 - 3k - K^2 + K + 4]$$

$$= \frac{1}{2}[(k-1)^2 - (k-1) - K^2 + K + 2]$$

$$= \frac{1}{2}[\underbrace{(k-1-K)}_{\geq 0} \underbrace{(k-2+K)}_{> 0} + 2] > 1 \quad \text{↯}$$

$$\text{Also } k = K$$

Mit $\varphi(u, m) = m + (k-2)(k-1)$

$$\varphi(v, \mu) = \mu + (k-2)(k-1)$$

folgt $m = \mu$

Mit $k = u + m = v + \mu = k$

folgt dann $u = v$

Also ist φ injektiv.

Zu φ surjektiv.

$z \in \mathbb{N}$, Gesucht: $(u, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$\varphi(u, m) = m + \frac{1}{2}(k-2)(k-1) = z, \quad k := u + m$$

$k \mapsto \frac{1}{2}(k-2)(k-1)$ wächst streng monoton gegen $+\infty$.

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}: \frac{1}{2}(k-2)(k-1) < z \leq \frac{1}{2}(k-1)(k)$$

def.: $m := z - \frac{1}{2}(k-2)(k-1) \in \mathbb{N}$

$$u := k - m$$

$$\Rightarrow \varphi(u, m) = z$$

Ist $u = k - m > 0$?

$$k - m = k - z + \frac{1}{2}(k-2)(k-1)$$

$$> k - \frac{1}{2}(k-1)(k) + \frac{1}{2}(k-2)(k-1)$$

$$= \frac{1}{2}[2k - k^2 + k + k^2 - 3k + 2]$$

$$= 1 > 0$$

$$(a) \left[\frac{1}{120}, \frac{1}{6} \right) = (X \setminus (0, \frac{1}{120})) \cap (0, \frac{1}{6})$$

$$(b) \text{ Sei } I \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: I = (0, \frac{1}{N})$$

$$\text{setze } A_j := \left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right)$$

$$\text{Dann ist } I = \bigcup_{j \geq N} A_j$$

Aus der letzten Übung folgt,

$$\text{dass } \mathcal{I} = \left\{ \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \exists c \in \mathbb{N}}} A_j \mid \exists c \in \mathbb{N} \right\} \text{ eine}$$

σ -Algebra ist. Dies ist tatsächlich

die kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

$$(c) f^{-1}(\{3\}) = \{\frac{1}{3}\} \notin \mathcal{I}. \text{ Also ist } f \text{ nicht messbar.}$$

(d) Wir zeigen, dass f genau dann messbar ist, wenn es konstant auf den Mengen A_n , $n \in \mathbb{N}$ ist.

$$1. \text{ Wenn } f(a) \neq f(b) \text{ mit } a, b \in A_i \\ \text{so ist } f^{-1}(\{f(a)\}) \notin \mathcal{I}$$

$$2. \text{ Sei nun } f \text{ konstant auf den } A_i, \text{ also } f(A_i) = \{a_i\} \\ \text{Dann ist } f^{-1}((-\infty, a]) = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ wobei} \\ I = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \leq a\} \subset \mathbb{N}, \text{ also } f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{I}$$

(a) Sei $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ \sin(\frac{1}{x}) & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist f_n stetig und daher messbar.

Da $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch f messbar.

(b) Definiere $A_0 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $A_g = \{r_g\}$ wobei r_g eine Abzählung der rationalen Zahlen sei. Dann ist

$$\mathcal{I} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

eine σ -Algebra mit $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Wie in G2 sind Funktionen, die auf jedem A_g konstant sind, $\mathcal{I} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar. f erfüllt dies genau.

Dann ist wegen $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ f auch Borel messbar.