

1

Wir betrachten ein Gegenbeispiel:

Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine nicht-Borel-messbare Menge.

$E^c := \mathbb{R} \setminus E$ sein Komplement.

Wir bezeichnen hier mit $A^c := \mathbb{R} \setminus A$ das Komplement einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$. Sei

$$g(x) = \begin{cases} x & , x \in E \\ -x & , x \in E^c \end{cases}$$

Sei $g^{-1}(\{c\}) = B$. Dann ist $B = \emptyset$, $B = \{c, -c\}$

$B = \{c\}$ oder $B = \{-c\}$. Alle diese Mengen sind messbar. Die Fkt. $g(x)$ ist messbar genau dann, wenn $g^{-1}((-\infty, b])$ für alle $b \in \mathbb{R}$ messbar ist.

Sei $b = 0$. Dann ist $g^{-1}((-\infty, 0]) = ((-\infty, 0] \cap E) \cup ([0, \infty) \cap E^c) =: A$. Wir zeigen: A ist nicht messbar.

Annahme: A ist messbar.

$\Rightarrow [0, \infty) \cap A = [0, \infty) \cap \bar{E}$ messbar

$\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus (([0, \infty) \cap \bar{E})) \setminus (-\infty, 0] = E \cap (0, \infty)$ messbar

Dann muss aber auch $((-\infty, 0] \cap E) \cup (E \cap [0, \infty)) = E$

messbar sein, was der Annahme E nicht messbar widerspricht.

2

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist Konvergenz äquivalent zur Cauchy-Konvergenz, und daher ist

$$\{x : f_n(x) \text{ konvergent}\} = \{x : \forall \epsilon \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \forall l, n \geq k$$

$$|f_l(x) - f_n(x)| < 1/n\}$$

$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{l, n \geq k} \{x : |f_l(x) - f_n(x)| < 1/n\}$$

$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{l, n \geq k} |f_l - f_n|^{-1}([0, 1/n])$$

meßbar, denn $|f_l - f_n|$ ist meßbar

und $\mathcal{S}$ eine σ -Algebra.

3

(a) Wir müssen zeigen, dass $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n \cdot 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Da $\lambda(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([-n, n]) = \infty$, reicht es

zu zeigen, dass $\lambda(U) < \infty$.

Tatsächlich ist

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((q_n \cdot 2^{-n}, q_n + 2^{-n})) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n} = 2 < \infty$$

Also ist $U \subset \mathbb{R}$ und somit $\mathbb{R} \setminus U \neq \emptyset$.

(b) Zu $\varepsilon > 0$ setzen wir $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n})$

U ist offen als Vereinigung offener Mengen.

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q} \subseteq U$, ist

auch U dicht in $\mathbb{R}$.

Wie in (a) folgt

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n} = \varepsilon$$