

1

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. $B := f^{-1}((-\infty, a))$

Wir zeigen: $B = \emptyset$, $B = \mathbb{R}$, $B = (-\infty, b)$

oder $B = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Da alle diese Mengen Borel messbar sind, ist dann auch f messbar.

Wenn $f(x) \geq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $B = \emptyset$

Sei nun $B \neq \emptyset$ und $y \in B$

Da $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$, ist $(-\infty, y] \subset B$

$$\Rightarrow \bigcup_{y \in B} (-\infty, y] \subset B$$

Inbesondere gilt:

$$B = \bigcup_{y \in B} \{y\} \subset \bigcup_{y \in B} (-\infty, y] \subset B$$

$$\Rightarrow B = \bigcup_{y \in B} (-\infty, y]$$

Sei $b = \sup B$

Dann folgt $B = (-\infty, b)$

Falls $b = \max B$ folgt $B = (-\infty, b]$

Falls B unbeschränkt, ist $B = \mathbb{R}$

2

(1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ also $\emptyset \in \mathcal{F}[S]$

Ist $A \in \mathcal{F}[S]$, d.h. $f^{-1}(A) \in S$, dann folgt:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A) \in S$$

da S eine σ -Algebra ist. Also ist

$$Y \setminus A \in \mathcal{F}[S]$$

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}[S]$

Dann gilt $f^{-1}(A_n) \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{und daher } f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in S$$

wieder, weil S eine σ -Algebra ist.

Also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}[S]$ und $\mathcal{F}[S]$ ist

somit eine σ -Algebra.

- 2) $f: X_1 \rightarrow X_2$ ist messbar genau dann,
wenn für alle $A \in \mathcal{S}_2$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$.
Diese Bedingung ist aber äquivalent
zu $A \in \mathcal{F}[S]$

3

(i) $\lambda(A_1) = 0$ nach Definition des Maßes.

(ii) $\lambda(A_2) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 2\}) - \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\})$

$$= (2 \cdot (-2))^n - (1 \cdot (-1))^n = 4^n - 2^n$$

(iii) Einelementige Mengen sind Borelmengen und $\mathbb{Q}$ ist abzählbare Vereinigung von einelementigen Borelmengen und damit eine Borelmenge.

Weiter ist $[0, 1] \setminus \mathbb{Q} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ eine Borelmenge.

Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann ist

$$\lambda(\{q_n\}) \leq \lambda([q_n - \varepsilon, q_n + \varepsilon]) = 2\varepsilon$$

also $\lambda(\{q_n\}) = 0$. Da λ σ -additiv

$$\text{folgt } \lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(\{q_n\}) = 0$$

Um $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$ zu bestimmen, betrachte

$$1 = \lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$$

$$= \lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) + \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q})$$

$$= \lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$$

$$\text{da } 0 \leq \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0$$