

1P

Auf Nullmengen kommt es nicht an

Aussageform A über $X := \mathbb{R}^n$

$A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

A gilt fast überall (f. ü.)

$\Leftrightarrow \exists N$ (Nullmenge) $\forall x \in X \setminus N : A(x)$

zu (i) $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

(1) $f_n \geq 0$ f. ü.

(2) $f_n \rightarrow f$ f. ü.

$\Downarrow$

(3) $f \geq 0$ f. ü.

Wir übersetzen (1) und (2)

(1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N_n$ (Nullmenge) $\forall x \in X \setminus N_n : f_n(x) \geq 0$

(2) $\exists N_0$ (Nullmenge) $\forall x \in X \setminus N_0 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

Ziel ist:

(3) $\exists N$ (Nullmenge) $\forall x \in X \setminus N : f(x) \geq 0$

definiere: $N := N_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ ist Nullmenge

$$x \in X \setminus N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1') \quad \forall n : x \notin N_n \Rightarrow \forall n : f_n(x) \geq 0 \\ (2') \quad x \notin N_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \text{für } x \in X \setminus N \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ f. ü.}$$

(ii) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $\overline{1P}$ messbar

$$(f \geq 0 \quad \wedge \quad \int_A f d\mu = 0) \Rightarrow f = 0 \text{ f.ü.}$$

Es ist $A = A_0 \dot{\cup} A_+$ ($\dot{\cup}$ heißt disjunkt)

$$A_0 := \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$A_+ := \{x \mid f(x) > 0\}$$

$$\text{Ziel: } \mu(A_+) = 0$$

$$\underbrace{\int_A f d\mu}_{=0} = \underbrace{\int_{A_0} f d\mu}_{=0} + \int_{A_+} f d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{A_+} f d\mu = 0, \quad f > 0$$

Wir definieren: $A_n := \{x \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$

Dann ist $A_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Weiter ist

$$0 \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_A f d\mu = 0, \text{ da } A_n \subset A$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{A_n} f d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(A_n) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(A_+) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

2 P

Wegen $a + \emptyset = \emptyset$ gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

Seien $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ disjunkt. Dann ist

auch $(A_k + a)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ disjunkt

$A_k + a \in \mathcal{B}$, weil $x \mapsto a + x$ (stetig) und
ihre Inverse meßbar ist.

Also gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lambda\left(a + \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a + A_k)\right)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(a + A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

Also ist μ ein Borelmaß.

Weiter gilt für $c < b$, $c, b \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu([c, b]) &= \lambda([c+a, b+a]) = \prod_{j=1}^n b_j + a_j - (c_j + a_j) \\ &= \prod_{j=1}^n (b_j - c_j) = \lambda([c, b]) \end{aligned}$$

μ nimmt auf Intervallen das Lebesgue'sche
Volumen an. Nach dem Eindeutigkeitsatz
für das Lebesguemaß folgt $\mu = \lambda$, bzw.

$$\lambda(A + a) = \lambda(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{B}$$

JP

Vir beweisen: Für reelle Zahlen a, b , $a < b$
gilt: $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$a < b < 0$$

$$a < 0 < b$$

$$0 \leq a < b$$

Sei $a < 0 < b$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mu((a, b]) &= \mu((0, b] \cup (a, 0]) \\ &= \mu((0, b]) + \mu((a, 0]) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Die beiden anderen Fälle gehen analog.

Seien nun $(a_n), (b_n)$ Folgen, die gegen x konvergieren, wobei (a_n) streng monoton wächst und (b_n) streng monoton fällt.

$$\text{Dann gilt } E_n := (a_n, b_n) \supseteq E_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$$

$$\text{Sowie OBdd } \mu(E_1) < \infty.$$

Nach Lemma 2.17 gilt:

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \text{ Also}$$

$$F(b_n) - F(a_n) = \mu((a_n, b_n]) \rightarrow \mu(\{x\})$$

Ist $\mu(\{x\}) > 0$ dann F in x nicht stetig sein.

Ist $\mu(\{x\}) = 0$ so gilt (Monotonie von F)

$$F(b_n) \leq F(x) \leq F(a_n), \text{ also } \begin{aligned} F(b_n) &\rightarrow F(x) \\ F(a_n) &\rightarrow F(x) \end{aligned}$$