

$$(1) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \chi_{\left[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}}\right]}(x), \quad x \in E = [0,1)$$

ist eine Stufenfunktion auf E , nach Lemma 3.1. Da $\mu(E) < \infty$ ist, sind sie auch Lebesgue-integrierbar.

$$\int_E f_n(x) d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Die Folge f_n konvergiert gln. gegen f ,

$$\text{da } \max_{x \in [0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$$

Aus A1 Gruppenübung und $f(x) > f_n(x)$ folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_E f(x) d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{2}{3}$$

(2) Die Funktionen $f_n(x) := \sum_{k=1}^n k \cdot \chi_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]}$ sind Stufenfunktionen mit $f_n(x) \leq f(x)$

$$\int_E (f_n) = \sum_{k=1}^n k \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n) = +\infty$$

$\Rightarrow \int_E f d\lambda = \infty$. Also ist f nicht Lebesgue-integrierbar.

24
Sei $A = \{ x \in X \mid f(x) \geq c \}$

$$g(x) := c \cdot \chi_A$$

Da $g(x) \leq |f(x)|$ folgt

$$c \cdot \mu(A) = \int_X \chi_A(x) d\lambda \leq \int_X |f(x)| d\lambda$$

also die behauptete Ungleichung.

Nach A3 Gruppenübung gibt es eine offene Menge $U_n \supset A$ mit $\lambda(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$.

$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ist eine G_δ -Menge, die

A umfasst. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lambda(B \setminus A) \leq \lambda(U_n \setminus A) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lambda(B \setminus A) = 0$$

Entsprechend folgt die zweite Aussage

zur nächsten Aussage:

Ist $A \in \mathcal{L}$, so gibt es ein U (offen),

F (abgeschlossen), $F \subset A \subset U$

mit $\lambda(U \setminus A) < \varepsilon/2$, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon/2$

Weite ist $U \setminus F = U \setminus A \cup A \setminus F$

$$\Rightarrow \lambda(U \setminus F) < \varepsilon$$

Hat umgekehrt A die angegebene Eigenschaft, so wählen wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ U_n (offen)

F_n (abgeschlossen) mit $\lambda(F_n \setminus U_n) < \varepsilon$,

$$U_n \supset A \supset F_n.$$

$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ sind

Borel messbar, es gilt $B \subset A \subset C$

und $\lambda(C \setminus B) = 0$. Also ist $A = B \cup (A \setminus B)$

Vereinigung der Borelschen Menge B und der Teilmenge $A \setminus B$ der λ -Nullmenge $C \setminus B$. Da

Da $\lambda|_{\mathcal{L}}$ vollständig ist, folgt $A \in \mathcal{L}$.