Musterlösung Blatt 9

1) zum ersten Teil

Mit $|f(x)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|y\| \, \|x\|$

folgt $\|f\| \leq \|y\|$

Auf der anderen Seite gilt

$$f(y) = \langle y, y\rangle = \|y\|^2 = \|y\| \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in H} \frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \geq \frac{\|f(y)\|}{\|y\|} = \|y\|$$

$$\Rightarrow \|f\| = \|y\|.$$

zur Äquivalenz:

(1) <=> (3)

(3) => (1) Sei f beschränkt. Betrachte die in H konvergente Folge $x_k \to x$.

$$\Rightarrow \|f(x_k) - f(x)\| = \|f(x - x_k)\| \leq \|f\| \, \|x - x_k\| \to 0.$$

Also ist f stetig.

(1) => (3)

Sei f stetig. Angenommen, A ist nicht beschränkt. Dann gibt es $x_k \in H$ mit

$\|x_k\| = 1 \qquad \|f(x_k)\| \geq k \qquad k = 1, \ldots$

Dann konvergiert $y_k := \frac{x_k}{k}$ gegen 0.

Da f stetig ist, folgt also $f(y_k) \to 0$.

Aber $|f(y_k)| = \left|\frac{1}{k} f(x_k)\right| \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ↯

$(1) \Rightarrow (2)$ ist trivial

$(2) \Rightarrow (3)$ folgt genau so wie $(1) \Rightarrow (3)$ wortwörtlich. Auch $(3) \Rightarrow (2)$ wie $(3) \Rightarrow (1)$

Also ist alles gezeigt.

2| Seien $x, y \in X$

1) Für alle $a \in A$ gilt

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

also $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$

Analog $d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|$.

Damit ist die Funktion Lipschitzstetig.

Wir behaupten: $A = \{ x \in A \mid d(x, A) = 0 \}$

Sei $x \in X$ mit $d(x, A) = 0$. Dann gibt es eine Folge $(a_n) \subset A$ mit

$$\|a_n - x\| \leq d(x, A) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow a_n \to x$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$.

Die umgekehrte Inklusion ist klar.

2) Sei $\delta \in (0, 1)$ [$\delta > 1$ uninteressant]

$x_0 \in X \setminus A$.

$\Rightarrow d(x_0, A) > 0$.

Weiter gibt es $a_\delta \in A$ mit

$$\|x_0 - a_\delta\| \leq \frac{d(x_0, A)}{1 - \delta}$$

setze $x_\delta := \dfrac{x_0 - a_\delta}{\| x_0 - a_\delta \|} \Rightarrow \| x_\delta \| = 1.$

Für $a_0 \in A$ ist $a_\delta + \| x_0 - a_\delta \| a_0 \in A$

da A ein Unterraum ist und es folgt

$$\| x_\delta - a_0 \| = \frac{\| x_0 - (a_\delta - \| x_0 - a_\delta \| a_0) \|}{\| x_0 - a_\delta \|}$$

$$\geq \frac{d(x_0, A)}{\| x_0 - a_\delta \|} \geq 1 - \delta$$

$$\Rightarrow \quad d(x_\delta, A) \geq 1 - \delta$$

3) Wir schätzen ab

$$|f_\varepsilon(u)| \leq |u|_\infty \cdot \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon 1\, dt \leq |u|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f_\varepsilon\| \leq 1.$$

Nehmen wir an, es gäbe eine Nullfolge (ε_j), so dass (f_{ε_j}) schwach-* konvergiert.

Wir wählen rekursiv eine Teilfolge nach den Bedingungen

$$\varepsilon_{\pi(1)} := \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_{\pi(k+1)} < \frac{1}{k} \cdot \varepsilon_{\pi(k)}$$

(π sei ein Teilfolgenauswähler)

also O.B.d.A. $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} < \frac{1}{k} \to 0$

Sei nun $u := \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \chi_k$

$$\chi_k := \chi_{I_k} \qquad I_k := (\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k)$$

Wir sehen $I_k \subset (0, \varepsilon_{2j})$ für $k \geq 2j$

und $I_k \cap (0, \varepsilon_{2j}) = \emptyset$ für $k < 2j$

$$\Rightarrow f_{\varepsilon_{2j}}(u) = \frac{1}{\varepsilon_{2j}}\left[+(\varepsilon_{2j} - \varepsilon_{2j+1}) + \int_0^{\varepsilon_{2j+2}} u\, dt\right]$$

$$\Rightarrow |f_{\varepsilon_{2j}}(u) - 1| \leq \frac{\varepsilon_{2j+1}}{\varepsilon_{2j}} + \frac{\varepsilon_{2j+2}}{\varepsilon_{2j}} \cdot 1 \to 0$$

Analog folgt

$$f_{\varepsilon_{2j+1}}(u) = \frac{1}{\varepsilon_{2j+1}}\left[-(\varepsilon_{2j+1} - \varepsilon_{2j+2}) + \int_0^{\varepsilon_{2j+3}} u\, dt\right]$$

$$\Rightarrow |f_{\varepsilon_{2j+1}} + 1| \leq \frac{\varepsilon_{2j+2}}{\varepsilon_{2j+1}} + \frac{\varepsilon_{2j+3}}{\varepsilon_{2j+1}} \cdot 1 \to 0$$

Also konvergiert die Folge (f_{ε_k}) nicht schwach-*.