Musterlösung Blatt 10

$X_c := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \chi_M(x) > c \}$

$\Leftarrow$ Im Fall $c > 1$ ist die Menge X_c leer, also offen.

Für $0 \leq c < 1$ ist $X_c = M$, also offen.

Für $-\infty < c < 0$ ist $X_c = \mathbb{R}^n$, also offen.

$\Rightarrow$ Wäre M nicht offen, so gibt es ein $x' \in \partial M$ mit $x' \in M$, d.h. $\chi_M(x') = 1$.

Sei $0 < c < 1$. In jeder Umgebung von x' liegen Elemente aus M und dem Komplement. Also nimmt χ_M in jeder noch so kleinen Umgebung von x' den Wert 0 als auch den Wert 1 an.
Dann kann X_c nicht offen sein.

Aufgabe 2:

Bei $x = 4$ ist f diff'bar, also ist das Subdifferential eindeutig

$$\partial f(4) = \{ Df(4) \} = \{ f'(4) \}$$

Bei $x = 1$ ist f nicht diff'bar.

$$f(1) = 0$$

Wir suchen also alle $z \in \mathbb{R}$, für die

$$f(x) \geq f(1) + z \cdot (x-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fallunterscheidung:

$x \leq 1$

$$\Rightarrow \quad -x+1 \geq z \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x+1}{x-1} \leq z \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq z$$

$x \geq 1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \geq z(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1) \geq z \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq z$$

Also folgt $\partial f(1) = [-1, 0]$

Aufgabe 3:

(i) => (ii)

Sei $\lambda > 0$. Da f konvex ist, haben wir

$$f(y) - f(x) \geq \frac{1}{\lambda} [f(x + \lambda(y-x)) - f(x)]$$

Der Grenzübergang $\lambda \to 0$ liefert also das Ergebnis.

(ii) => (i)

Für $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) + \langle x - (\lambda x + (1-\lambda y)), \nabla f(\lambda x + (1-\lambda) y) \rangle$$

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda y)) + \langle y - (\lambda x + (1-\lambda y)), \nabla f(\lambda x + (1-\lambda) y) \rangle$$

Indem wir die erste USL mit λ, die zweite mit $(1-\lambda)$ multiplizieren und beide USL addieren, erhalten wir die Konvexität.

(ii) => (iii)

N.V. haben wir

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, \nabla f(x) \rangle$$
$$f(x) \geq f(y) + \langle x - y, \nabla f(y) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle y - x, \nabla f(y) \rangle \geq f(y) - f(x) \geq \langle y - x, \nabla f(x) \rangle$$

also folgt die Beh.

(iii) => (ii)

Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $\phi(\lambda) := f(x + \lambda(y-x))$

Es gilt:

$$\phi'(\lambda) - \phi'(0) = \langle y - x, \nabla f(x + \lambda(y-x)) - \nabla f(x) \rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[\langle x + \lambda(y-x) - x, \nabla f(x + \lambda(y-x)) - \nabla f(x) \rangle \right] \geq 0$$

Die UGL gilt wegen (iii).

Integrieren liefert

$$\phi(\lambda) \geq \phi(0) + \lambda \phi'(0)$$

Mit $z = x + \lambda(y-x)$ erhalten wir also

$$f(z) \geq f(x) + \langle z - x, \nabla f(x) \rangle .$$