Musterlösung Blatt 11

Wir setzen also voraus:

$$F(x,y,y') \geq c_1 (y')^2 - c_2 |y|^q - c_3 \quad (K)$$

$c_1 > 0 \quad , \quad 1 \leq q < 2$

$y \in W^{1,2}(a,b)$

Dann gilt

$$I(y) \geq c_1 \|y'\|_2^2 - c_2 \int_a^b |y|^q \, dx - c_3 (b-a)$$

$$\geq c_1 \|y'\|_2^2 - c_2 (b-a)^{1-\frac{q}{2}} \cdot \left(\int_a^b y^2 \, dx \right)^{q/2} - c_3 (b-a)$$

$\hat{=}$ (Höldersche UGL)

$$\geq \frac{c_1}{2 C_1^2} \|y\|_2^2 - c_2 (b-a)^{1-\frac{q}{2}} \|y\|_2^q - \frac{c_1 C_2^2}{C_1^2} - c_3 (b-a$$

$\hat{=}$ (siehe Präsenzaufgabe 1 $: C_1 \|y'\|_2 + C_2 \geq \|y\|_{1,2}$)

$\geq -c_4$ da $c_1 > 0$ und $q < 2$

Also, I ist beschränkt.

Nun zur Beschränktheit der Minimalfolge

Sei (y_n) eine solche.

Wieder gilt ab einem gewissen Index n_0

$$c_1 \|y_n'\|_2^2 - c_2 \int_a^b |y_n|^q \, dx - c_3 (b-a) \leq m+1$$

oder $m+1 + c_3 (b-a) \geq c_1 \|y_n'\|_2^2 - c_2 (b-a)^{1-\frac{q}{2}} \|y_n\|_2^q$

$$\geq \frac{c_1}{2 C_1'^2} \|y_n\|_{1,2}^2 - c_2 (b-a)^{1-\frac{q}{2}} \|y_n\|_{1,2}^q - \frac{c_1 C_2'^2}{C_1'^2}$$

$\uparrow$ siehe P-Aufgabe 1

für alle $n \geq n_0$.

Da $c_1 > 0$ und $q < 2$ folgt

$$\|y_n\|_{1,2} \leq C_3$$

y_n ist in $W^{1,2}(a,b)$ also beschränkt und wir wählen eine schwach konvergente Teilfolge $\hat{y}_n$ aus.

Analog zur Übung definieren wir

$$\hat{I}(y) = I(y) + c_2 \int_a^b |y|^q \, dx + c_3 (b-a) \geq 0$$

Da $\lim_{n \to \infty} \hat{y}_n = \tilde{y}_0$ in $C([a,b])$ glm auf $[a,b]$ folgt

$$\lim_{n \to \infty} c_2 \int_a^b |\tilde{y}_n|^q \, dx + c_3 (b-a)$$

$$= c_2 \int_a^b |\hat{y}_0|^q \, dx + c_3 (b-a)$$

Also können wir analog wie in der Übung auf die Unterhalbstetigkeit schließen.

Aufgabe 2:

Mit y_0 ist für alle $h \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(a,b)$

auch $y_0 + t \cdot h \in D$, $t \in \mathbb{R}$

Da y_0 ein Minimierer und die erste Variation existiert, muss gelten:

$$\frac{d}{dt} I(y_0 + th)\Big|_{t=0} = \delta I(y_0)h = 0$$

für alle $h \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(a,b)$

Die Wachstumsbedingungen garantieren, dass

$F_y(\cdot, y_0, y_0') \;\&\; F_{y'}(\cdot, y_0, y_0') \in L^2(a,b)$

für $y_0 \in W^{1,2}(a,b) \subset C[a,b]$.

Wir können also partiell integrieren und erhalten die gewünschte Darstellung.

Aufgabe 3:

$F(x, y, y') = x^2 (y')^2$ erfüllt für

$x \in [-1, 1]$ nicht die Koerzitivität.

Für die Minimalfolge $y_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)}$

gilt: $\|y_n\|_{1,2}^2 \geq \frac{1}{(\arctan(n))^2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{n}{1+n^2x^2} \right)^2 dx$

$\geq \frac{4}{\pi^2} n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{(1+n^2x^2)^2} > \frac{4}{\pi^2} n^2 \cdot \frac{2}{n} \frac{1}{4} = \frac{2n}{\pi^2}$

Also ist y_n in $W^{1,2}(-1, 1)$

nicht beschränkt.