Musterlösung Blatt 5

1) Da $F_{yy'} \in C^1[a,b]$ u. V. können wir partiell integrieren und erhalten

$$\delta^2 I(y)(\varphi,\varphi) = \int_a^b F_{yy}\varphi^2 + 2F_{yy'}\varphi\varphi' + F_{y'y'}(\varphi')^2\,dx$$

$$= \int_a^b F_{yy}\varphi^2 + 2F_{yy'}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\varphi^2) + F_{y'y'}(\varphi')^2\,dx$$

$$= \int_a^b \left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\varphi^2 + F_{y'y'}(\varphi')^2\,dx$$

also die gewünschte Darstellung

Bemerkung: $F_{yy'} = F_{y'y}$ gilt aufgrund des Satzes von Schwarz

2) (1) $2\frac{d}{dx}(y'+x) = 0$ oder $y'' = -1$

Beachten der RB ergibt $y(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$

Ferner gilt: $\delta^2 I(\tilde{y})(\varphi,\varphi) = 2\int_0^1 (\varphi')^2\,dx \geq 0$ für alle zulässigen $\tilde{y}$. Also ist y ein globaler Minimierer.

(2) $2\frac{d}{dx}(y'+y) = 2(y'+y)$ oder $y'' = y$. Beachten der RB ergibt $y(x) = \frac{\sinh(x)}{\sinh(2)}$; $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Ferner $\delta^2 I(\tilde{y})(\varphi,\varphi) = \int_0^2 2(\varphi')^2 + 4\varphi\varphi' + 2\varphi^2\,dx$

$$= 2\int_0^2 (\varphi' + \varphi)^2\,dx \geq 0$$

3/ Mit $\varphi \in C_0^1[a,b]$ sei
$$g(t) = I(y + t\varphi), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es gilt $y + t \cdot \varphi \in D$.

Es gilt $g''(t) = \delta^2 I(y + t\varphi)$ und

nach Voraussetzung $\delta^2 I(y + t\varphi) \geq 0$

Mit dem Hinweis rechnen wir

$$I(y+\varphi) = I(y) + \delta I(y)\varphi + \int_0^1 (1-t)\,\delta^2 I(y+t\varphi)(\varphi,\varphi)\,dt$$

$$\geq I(y) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1[a,b]$$

Ist $\tilde{y} \in D$ beliebig, so schreiben wir $\tilde{y} = \tilde{y} + y - y = y + h$ mit $h = \tilde{y} - y \in C_0^1[a,b]$