1/ Musterlösung Blatt 7

Ersetzen wir u durch $u - r_1$ und v durch $v - r_2$, bleibt die UGL erhalten.

Wir schreiben die Ungleichung in der äquivalenten Form:

$$\int_{-1}^{1} (u')^2 + (v')^2 - 2\pi\, u \cdot v' \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (v' - \pi u)^2 + \int_{-1}^{1} \left((u')^2 - \pi^2 u^2\right) dx \geq 0,$$

denn der erste Ausdruck ist klarerweise positiv, der zweite nach der Wirtingerschen UGL.

Gilt Gleichheit, dann muss

$$v' = \pi u, \quad \int_{-1}^{1} (u')^2 - \pi^2 u \, dx = 0$$

gelten. Dann muss aber

$$u(x) = \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x)$$

$$v(x) = \alpha \sin(\pi x) - \beta \cos(\pi x)$$

gelten. (siehe hierzu nochmals im Beweis der Wirtingerschen UGL).

Da wir u, v durch $u - r_1$, $v - r_2$ ersetzen können, erhalten wir also

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2$$

2/ Für $\varphi \in C_0^1([t_a,t_b])^n$ gilt

(1) $$\delta I(x)\varphi = \int_{t_a}^{t_b} \langle J_F(x)\varphi, \dot{x}\rangle + \langle F(x), \dot{\varphi}\rangle \, dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \langle \varphi, J_F^t(x)\dot{x}\rangle - \langle \tfrac{d}{dt}F(x), \varphi\rangle \, dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \langle [J_F^t(x) - J_F(x)]\dot{x}, \varphi\rangle \, dt$$

J_F bezeichnet die Jacobimatrix und J_F^t die dazu adjungierte.

(2) Das System der Euler-Lagrange Gleichungen lautet $\left(J_F^t(x) - J_F(x)\right)\dot{x} = 0$

für alle $t \in [t_a, t_b]$

Also besitzt das System nur Lösungen, wenn $\ker\left(J_F^t(x) - J_F(x)\right) \neq \{0\}$

(3) In diesem Fall gilt $J_F^t = J_F$ sowie daraus folgend $\delta I(x) = 0$ und jedes x löst das ELG. Die Symmetrie hat zur Folge, dass das Vektorfeld ein Potential $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt, d.h. $F(x) = \nabla g(x)$

$$\Rightarrow I(x) = \int_{t_a}^{t_b} \langle \nabla g(x), \dot{x}\rangle = \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}\left(f(x(t))\right) dt$$

$$= f(x(t_a)) - f(x(t_b))$$

3/ Wir erinnern an die Darstellung

$$\delta^2 I(y)(\varphi,\varphi) = \int_a^b P \cdot h^2 + Q \cdot (h')^2 \, dx$$

$$P = F_{YY} - \frac{d}{dx} F_{YY'} \quad , \quad Q = F_{Y'Y'}$$

$$P, Q \in C^0([a,b]) .$$

Angenommen, es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$F_{Y'Y'}(x_0, Y(x_0), y'(x_0)) < 0$$

Da $F_{Y'Y'}$ u.V. stetig ist, gibt es ein kompaktes Intervall $I \subset [a,b]$ mit

$$F_{Y'Y'}(x, Y(x), y'(x)) \leq -c_1 < 0 \quad \forall x \in I$$

und $c_1 \in \mathbb{R}_+$.

Da P stetig ist, nimmt P sein Maximum an, dies bezeichnen wir mit c_2.

Da Y Minimierer ist, gilt $\delta^2 I(y)(\varphi,\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C_0^1([a,b])$. Wählen wir eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Präsenzaufgabe 3, erhalten wir

$$0 \leq \int_a^b P \cdot \varphi_n^2 + Q (\varphi_n')^2 \, dx$$

$$\leq \int_a^b c_2 h_n^2 \, dx + \int_I F_{Y'Y'} (\varphi_n')^2 \, dx$$

$$\leq c_2 \int_a^b h_n^2 \, dx - c_1 \int_a^b (h_n')^2 \, dx < 0$$

wenn wir n groß genug wählen.

Widerspruch.