Aufgabe 1:

(1) co E ist natürlich beschränkt. Wir zeigen also noch, dass co E abgeschlossen ist.

Sei $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \text{co}\, E$, $x_\nu \to x \in \mathbb{R}^N$

Wir zeigen $x \in \text{co}\, E$

Nach P1 finden wir λ_i^ν, $i = 1 \dots N+1$ $\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i^\nu = 1$ und $x_i^\nu \in E$, so dass

$$x_\nu = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i^\nu x_i^\nu$$

Da $\{ (\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}) \mid \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{} \lambda_i = 1 \}$

und E kompakt sind, finden wir Teilfolgen (welche weiterhin mit λ_i^ν, x_i^ν bezeichnet werden) mit

$$\lambda_i^\nu \to \lambda_i \quad \text{und} \quad x_i^\nu \to x_i \quad i = 1 \dots N+1$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i \quad \text{und somit } x \in \text{co}\, E$$

(2) Sei $x \in \text{co}\, E$

zu zeigen: Es gibt $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^N \mid |y - x| < \varepsilon \} \subset \text{co}\, E$$

Nach P1 besitzt x die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1$$

Da E offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$

so dass $B_\varepsilon(x_i) \subset E$ $i = 1 .. N+1$

Sei nun $y \in B_\varepsilon(x)$. Definiere

$y_i := x_i + y - x$ $i = 1 .. N+1$

Dann ist $y_i \in B_\varepsilon(x_i)$ $i = 1 .. N+1$

und $y = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i y_i$

$$|y - x| = \left| \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (y_i - x_i) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (y - x) \right| \leq \sum_{i=1}^{N+1} \left| \lambda_i (y - x) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i |y - x| \leq \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Also folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die Addition $+ : F \times F \to F$,

Multiplikation $\cdot : F \to F$ und

Norm $\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}$ sind

stetig, also ist

$$s : F \times F \to \mathbb{K} \text{ stetig.}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt offenbar $s(\varphi, \psi) = s(\psi, \varphi)$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt

$$\overline{s(\varphi, \psi)} = \frac{1}{4}\left(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 - i\|\varphi + i\psi\|^2 + i\|\varphi - i\psi\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 - i\|\psi - i\varphi\|^2 + i\|\psi + i\varphi\|^2 = s(\psi, \varphi) \right.$$

In jedem Fall ist s also hermitesch.

Zur Linearität:

Es gilt $\sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon = 0$, mit der Parallelogrammgleichung rechnen wir

$$\Rightarrow s(\varphi, \chi) + s(\psi, \chi)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left(\|\varphi + \varepsilon\chi\|^2 + \|\psi + \varepsilon\chi\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left(\|\varphi + \psi + 2\varepsilon\chi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \|\varphi + \psi + 2\varepsilon\chi\|^2$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \left[2\left(\|\varphi + \psi + 2\varepsilon\chi\|^2 + \|\chi\|^2 \right) - \|\varphi + \chi\|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \, \| \varphi + \psi + \varepsilon \chi \|^2 = s(\varphi + \psi, \chi)$$

für alle $\varphi, \psi, \chi \in F$. Also ist s

$\mathbb{Z}$ - bilinear. Für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus 0$ folgt

$$\frac{p}{q} \cdot s(\varphi, \psi) = \frac{1}{q} \cdot s(p \cdot \varphi, \psi) = \frac{1}{q} s\left(q \cdot \frac{p}{q} \varphi, \psi\right)$$

$$= s\left(\frac{p}{q} \varphi, \psi\right)$$

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ $\lim_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha$

Aufgrund der Stetigkeit von s gilt

$$\alpha \, s(\varphi, \psi) = \lim_{k \to \infty} \alpha_k \, s(\varphi, \psi) = \lim_{k \to \infty} s(\alpha_k \varphi, \psi) = s(\alpha \varphi, \psi)$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, gilt mit $\delta = i\varepsilon$

$$i \, s(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^4 = 1} i\varepsilon \, \| \varphi + \varepsilon \psi \|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\delta^4 = 1} \delta \, \| \varphi - i \delta \psi \|^2$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\delta^4 = 1} \delta \, \| i \varphi + \delta \psi \|^2 = s(i \varphi, \psi)$$

Also ist s eine Sesquilinearform.

Als Letztes gilt

$$s(\varphi, \varphi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{2k}=1} \varepsilon \, |1 + \varepsilon|^2 \, \|\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \delta_{\mathbb{K}, \mathbb{C}} \sqrt{2}(i - i) \|\varphi\|^2$$

$$= \|\varphi\|^2 \quad \text{wobei:} \quad \delta_{\mathbb{K}, \mathbb{C}} = \begin{cases} 1 & \mathbb{K} = \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases}$$

und s ist nicht ausgeartet, da $\| \cdot \|$ eine Norm ist.

Aufgabe 3:

„$\Rightarrow$" Für $y \in H$ folgt

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0 \quad , \text{ also } x_n \overset{\omega}{\to} x$$

Weiter folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \leq \|x_n - x\| \to 0$$

also $\|x_n\| \to \|x\|$.

„$\Leftarrow$" $\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle$

$$= \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to \|x\|^2} - \underbrace{\langle x_n, x\rangle}_{\to \|x\|^2} - \underbrace{\overline{\langle x_n, x\rangle}}_{\to \|x\|^2} + \|x\|^2 \to 0$$

n. V. , d.h. $\|x_n - x\| \to 0$.