Wegen $u_s \in C^1(X)$, $X := \mathbb{R}^N \setminus \overline{U}$

gilt $\quad -\langle u_s, \partial_n \varphi \rangle = \langle \partial_n u_s, \varphi \rangle$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(X)$.

Daher gehört u_s genau dann zu $W^{1,p}(X)$, wenn

$$u_s \in L^p(X) \quad \wedge \quad \forall n \in \{1..N\}\ \partial_n u_s \in L^p(X)$$

Wegen $\|u_s\|^p_{L^p(X)} = \int_X |x|^{sp}\,dx = \beta_N \int_1^\infty r^{N-1+sp}\,dr$

gilt $\quad u_s \in L^p(X) \iff s < -\frac{N}{p} \qquad (1)$

Aus $\quad \partial_n u_s(x) = s\,|x|^{s-2} x_n$

folgt $\quad |\partial_n u_s(x)| \leq s\,|x|^{s-1}$

und daher auch $\partial_n u_s \in L^p(X)$

unter der Voraussetzung in (1). Diese ist also sowohl notwendig als auch hinreichend.

Musterlösung Blatt 2

Für $\varphi \in C_0^\infty(X)$ [nicht $\varphi \in H^1$]

folgt

$$\Delta(a \cdot \varphi) = \sum_{n=1}^{N} \partial_n^2 (a\varphi) = \sum_{n=1}^{N} \partial_n \left(\partial_n a \cdot \varphi + a \partial_n \varphi \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \partial_n^2 a \cdot \varphi + 2 \partial_n a \, \partial_n \varphi + a \partial_n^2 \varphi \qquad (1)$$

und damit

$$\Delta(a\varphi) = \Delta a \cdot \varphi + 2 \sum_{n=1}^{N} (\partial_n a)(\partial_n \varphi) + a \Delta \varphi$$

Wegen ${}^t\Delta = \Delta$ folgt

$$\langle au, {}^t\Delta \varphi \rangle = \langle u, \bar{a} \Delta \varphi \rangle$$

$$= \langle u, {}^t\Delta(\bar{a}\varphi) \rangle - 2 \sum_{n=1}^{N} \langle u, \partial_n \bar{a} \, \partial_n \varphi \rangle - \langle u, (\Delta \bar{a}) \varphi \rangle$$

$$= \langle \Delta u, \bar{a}\varphi \rangle - 2 \sum_{n=1}^{N} \langle (\partial_n a) u, \partial_n \varphi \rangle - \langle (\Delta a) u, \varphi \rangle$$

$$\overset{u \in U}{=} \langle a \Delta u, \varphi \rangle + 2 \sum_{n=1}^{N} \langle \partial_n [(\partial_n a) u], \varphi \rangle - \langle (\Delta a) u, \varphi \rangle$$

Wegen $\sum_{n=1}^{N} \partial_n [(\partial_n a) u] = (\Delta a) u + \sum_{n=1}^{N} \partial_n a \cdot \partial_n u$

folgt schließlich

$$\langle a \cdot u, {}^t\Delta \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

mit $f := a \cdot \Delta u + 2 \sum_{n=1}^{N} \partial_n a \cdot \partial_n u + \Delta a \cdot u \in L^2(X)$

Es ergibt sich also die (2) entsprechende Formel.

Die Transformation

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$y \mapsto x := \Phi(y) := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

hat

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto y := \Psi(x) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

als Inverse. Mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist dann auch $\psi(y) := \varphi(\Phi(y)) = \varphi(x)$ eine Testfunktion. Die Kettenregel liefert für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x = \Phi(y)$

$$\partial_1 \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_1 \psi(y) + \partial_2 \psi(y)\right)$$

$$\partial_2 \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_1 \psi(y) - \partial_2 \psi(y)\right)$$

$$\partial_1 \partial_1 \varphi(x) = \frac{1}{4}\left(\partial_1^2 \psi(y) + 2\partial_1\partial_2 \psi(y) + \partial_2^2 \psi(y)\right)$$

$$\partial_2 \partial_2 \varphi(x) = \frac{1}{4}\left(\partial_1^2 \psi(y) - 2\partial_1\partial_2 \psi(y) + \partial_2^2 \psi(y)\right)$$

und damit

$$^tP(\partial)\varphi(x) = P(\partial)\varphi(x) = \partial_1 \partial_2 \psi(y)$$

Der Transformationssatz liefert

$$\langle u, {}^tP(\partial)\varphi \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} u(x) \cdot (\partial_1^2 - \partial_2^2)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} u(\Phi(y)) \cdot \partial_2 \partial_1 \psi(y) \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| dy$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} u(2y_1)\, \partial_2 \partial_1 \psi(y_1, y_2)\, dy_2 \right] dy_1$$

nach dem Satz von Fubini.
Das innere Integral verschwindet aber nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.