Lösungen zu Blatt 3:

Nach Aufgabe 2 liegt $F_\varepsilon \circ u$ in $H^1(X)$ und es gilt

$$\partial_n (F_\varepsilon \circ u) = F_\varepsilon' \circ u \cdot \partial_n u = (\varepsilon^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot u \cdot \partial_n u$$

Die Funktion

$$g_\varepsilon(x) := F_\varepsilon(u(x)) - |u(x)| = (\varepsilon^2 + u^2(x))^{1/2} - \varepsilon - |u(x)|$$

konvergiert offensichtlich punktweise für alle $x \in X$ gegen Null. Außerdem gilt z.B. für $\varepsilon \leq 1$

$$-1 - |u(x)| \leq g_\varepsilon(x) \leq (1 + u^2(x))^{1/2}$$

und damit

$$g_\varepsilon^2(x) \leq h(x) := (1 + u^2(x)) \quad \text{mit}$$

$h \in L^1(X)$, da sowohl $1\!\!1$ als auch u zu $L^2(X)$ gehören. Nach dem Satz von Lebesgue folgt also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \| F_\varepsilon \circ u - |u| \|_{L^2(X)} = 0 \qquad (1)$$

Als schwache Ableitungen von $|u|$ erwarten wir

$$u_n := \operatorname{sgn} \circ u \cdot \partial_n u$$

Lösungen zu Blatt 3:

Nach Aufgabe 2 liegt $F_\varepsilon \circ u$ in $H^1(X)$ und es gilt

$$\partial_n (F_\varepsilon \circ u) = F_\varepsilon' \circ u \cdot \partial_n u = (\varepsilon^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot u \cdot \partial_n u$$

Die Funktion

$$g_\varepsilon(x) := F_\varepsilon(u(x)) - |u(x)| = (\varepsilon^2 + u^2(x))^{1/2} - \varepsilon - |u(x)|$$

konvergiert offensichtlich punktweise für alle $x \in X$ gegen Null. Außerdem gilt z.B. für $\varepsilon \leq 1$

$$-1 - |u(x)| \leq g_\varepsilon(x) \leq (1 + u^2(x))^{1/2}$$

und damit

$$g_\varepsilon^2(x) \leq h(x) := (1 + u^2(x)) \quad \text{mit}$$

$h \in L^1(X)$, da sowohl $1\!\!1$ als auch u zu $L^2(X)$ gehören. Nach dem Satz von Lebesgue folgt also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \| F_\varepsilon \circ u - |u| \|_{L^2(X)} = 0 \qquad (1)$$

Als schwache Ableitungen von $|u|$ erwarten wir

$$u_n := \operatorname{sgn} \circ u \cdot \partial_n u$$

Wir berechnen

$$h_\varepsilon := \partial_n (F_\varepsilon \circ u) - u_n$$

$$= \left[(\varepsilon^2 + u^2)^{-1/2} u - \operatorname{sgn} \circ u \right] \cdot \partial_n u$$

Wieder konvergiert offensichtlich h_ε punktweise für alle $x \in X$ gegen Null. Außerdem gilt

$$|h_\varepsilon| \leq \left[\frac{|u|}{(\varepsilon^2 + |u|^2)^{1/2}} + 1 \right] \cdot |\partial_n u| \leq 2 |\partial_n u| \in L^2(X)$$

Wieder mit Lebesgue folgt also auch

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \partial_n (F_\varepsilon \circ u) - u_n \right|_{L^2(X)} = 0 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, dass die u_n die schwachen Ableitungen von $|u|$ sind, denn

$$-\langle |u|, \partial_n \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle F_\varepsilon \circ u, \partial_n \varphi \rangle$$

$$= + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle \partial_n (F_\varepsilon \circ u), \varphi \rangle = \langle u_n, \varphi \rangle$$

Wegen $|u|$, $u_n \in L^2(X)$ gehört also $|u|$ zu $H^1(X)$.

Mit u und v gehören auch $u \pm v$ zu $H^1(X)$ ($H^1(X)$ ist ein Vektorraum) und damit

$$\max \{ u, v \} = \frac{1}{2} (u + v + |u - v|)$$

$$\min \{ u, v \} = \frac{1}{2} (u + v - |u - v|)$$

Aufgabe 2:

Nach Definition ist

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \cdot f(y) \, dy$$

Sei $k \in \{1 \dots n\}$, dann ist

$$|\partial_k (\varphi(x-y) \cdot f(y))|$$

$$= |(\partial_k \varphi(x-y)) \cdot f(y)| \leq C_k \cdot |f(y)| \in L^p$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir also die Differenzierbarkeit von F.

Per Induktion folgt, dass F beliebig oft diff'bar ist.

Außerdem lässt sich jeder Ausdruck

$\partial^\alpha F$ (α ein Multiindex)

durch $C_\alpha \cdot |f| \in L^p$ abschätzen, somit

liegt auch $\partial^\alpha F$ in L^p

Aufgabe 3:

$\varphi_\varepsilon \geq 0$ ist klar. Genauso ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$$ mit dem

Transformationssatz klar.

Wir müssen noch $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_\varepsilon(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ zeigen.

Zunächst ist $\operatorname{supp} \varphi \subset B_1(0)$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(x) \neq 0$ g.d.w. $|x| < 1$

Also folgt $\varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x| < 1$

und hieraus $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Da $\varepsilon \to 0$, sei OBdA $\varepsilon < \delta$. Dann gilt also

$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset B_\delta(0)$ und hiermit

$\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0) \cap \operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = \emptyset$

Also folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} \varphi_\varepsilon(x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$ für alle $\delta > 0$.