Musterlösung Blatt 4 23. 5. 2011

Aufgabe 1:

(1) $u(x) := \ln(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$X_1 := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Es ist $\partial_k |x| = x_k |x|^{-1}$, also

$$\partial_k u(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_k}{|x|} = \frac{x_k}{|x|^2}$$

Ist $\partial_k u(x) \in L^1_{loc}(X_1)$?

Wir schätzen ab

$|\partial_k u(x)| \leq |x| |x|^{-2} = |x|^{-1}$ und erhalten

$$\int_{K(0,R)} |\partial_k u(x)| \, dx \leq \int_{K(0,R)} |x|^{-1} \, dx$$

$$\overset{\text{Kugelkoordinaten}}{=} \beta_n \int_0^R r^{N-1} r^{-1} \, dr < \infty$$

für $N \geq 2$ $\Rightarrow$ $\partial_k u(x) \in L^1_{loc}(X_1)$

Im Fall $n=1$ erhalten wir

$$u'(x) = |x|^{-1} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$\int_0^1 |u'(x)| \, dx = \int_0^1 x^{-1} \, dx = +\infty$$

$\Rightarrow$ u hat im Fall $n=1$ keine schwachen Ableitungen in L^1_{loc}.

Zurück zum positiven Fall

Sei $\varphi \in C_0^\infty(X_1)$

Wir folgen der Definition

$$(-1)\int_{\mathbb{R}^n} \ln(|x|)\ \partial_k \varphi(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(0,\varepsilon)} \ln(|x|)\ \partial_k \varphi(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Bigg[-\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(0,\varepsilon)} \underbrace{\overbrace{\partial_k\left(\ln(|x|)\right)}^{\in L^1_{loc}}\cdot\overbrace{\varphi(x)}^{\in C_0^\infty}}_{\in L^1}\,dx$$

$$+\underbrace{\int_{S(0,\varepsilon)} n_k(x)\ \ln(|x|)\ \overbrace{\varphi(x)}^{\text{beschränkt}}\,dx}_{\leq C\cdot \ln(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{n-1}\ \to 0}\Bigg]$$

Also besitzt $\ln(|x|)$ für $N \geq 2$ schwache Ableitungen.

2. Sei nun $\quad u := \chi_{K(0,1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Es gilt $\quad u_{|U(0,1)} = 1\!\!1 \in C^\infty$

$$\partial_k\left(u_{|U(0,1)}\right) = 0$$

$$u_{|\mathbb{R}^n\setminus K(0,1)} = 0$$

$$\partial_k\left(u_{|\mathbb{R}^n\setminus K(0,1)}\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad \partial_k u = 0$

Hat u schwache Ableitungen?
Es müsste gelten:

$$0 = (-1) \langle u, \partial_k \varphi \rangle = -\int_{K(0,1)} 1 \cdot \partial_k \varphi(x) \, dx$$

$$= -\int_{S(0,1)} n_k(x) \, \varphi(x) \, dS(x)$$

$$= -\int_{S(0,1)} x_k \, \varphi(x) \, dS(x)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da für $S(0,1)$ $n_k(x) = x_k$ gilt.
Die Komponenten der äußeren Einheitsnormale $n(x)$ zu x stimmen mit den Komponenten von x überein.

Wir wählen $\varphi(x) = x_k \cdot \Phi(x)$
wobei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\Phi_{|K(0,1)} = 1$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\int_{S(0,1)} x_k^2 \, dS(x) < 0$$

Widerspruch.

Aufgabe 2

Für $\alpha > 1$ sei

$$X_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 < x_1 < 1 \wedge (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} < x_1^\alpha \right\}$$

Für $x \in X_\alpha$ gilt

$$x_1^2 \leq |x|^2 < x_1^2 + x_1^{2\alpha} = x_1^2 (1 + x_1^{2(\alpha-1)}) < 2 x_1^2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \leq |x| \leq \sqrt{2}\, x_1 \qquad (1)$$

Wir wählen $u(x) := \ln(|x|)$

u gehört nach P1 für alle p, α zu $L^p(X_\alpha)$.

Wegen $u \in C_0^\infty(X_\alpha)$ gehört u genau dann zu $W^{1,p}(X_\alpha)$ wenn alle $\partial_k u$ zu $L^p(X_\alpha)$ gehören

Nach (1) und P1 gilt

$$|\partial_k u(x)|^p \leq |x|^{-p} \leq |x_1|^{-p}$$ und wir

erhalten mit Fubini

$$\int_{X_\alpha} |\partial_k u|^p \, d\lambda \leq \int_0^1 \int_{U_{\mathbb{R}^2}(0, x_1^\alpha)} x_1^{-p} \, d\lambda(x_2, x_3)\, dx_1$$

$$\leq \pi \int_0^1 x_1^{-p} x_1^{2\alpha} \, dx_1 =: I(p, \alpha)$$

Es gilt: $I(p, \alpha) < \infty \Leftrightarrow -p + 2\alpha > -1 \Leftrightarrow p < 1 + 2\alpha$

wie gewünscht, da $\alpha > 1$.

Aufgabe 3:

$$u \in W_0^{1,p}(X) = \left\{ \exists (u_k) \text{ in } C_0^\infty(X) \text{ mit } |u_k - u|_{W_0^{1,p}} \to 0 \right\}$$

Also sei OBdA $u \in C_0^\infty(X)$. Es gilt

mit $x' = (x_1 \dots x_{n-1})$

$$u(x', x_n) = \int_0^{x_n} \partial_n u(x', t)\, dt$$

$$\Rightarrow |u(x', x_n)|^p \leq \left(\int_0^d |\partial_n u(x', t)| dt \right)^p$$

$$\leq \left(\int_0^d 1 \cdot |\nabla u(x', t)| dt \right)^p \leq \underbrace{\left(\int_0^d 1^q \right)^{p/q}}_{= d^{p/q}} \cdot \int_0^d |\nabla (u^p(x', t)|^p dt$$

Integration über $\mathbb{R}^{n-1}$ ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq d^{p/q} \cdot \int_0^d \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u(x)|^p d\lambda_{n-1}(x')\, dt$$

$$= d^{p/q} \int_X |\nabla u(x)|^p d\lambda_n = d^{p/q} |\nabla u|_{L^p}^p$$

$$\Rightarrow \int_0^d \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x)|^p d\lambda_{n-1}(x')\, dt = |u|_{L^p(X)}^p \leq d\, d^{p/q} |\nabla u|_{L^p(X)}^p$$

Mit $1 + \frac{p}{q} = p$ folgt

$$|u|_{L^p(X)} \leq d\, |\nabla u|_{L^p(X)}$$

Aufgabe 4

Gilt $u \in L^p(U)$? Wir berechnen

$$\int_U |u|^p \, d\lambda = 2\pi \int_0^{1/2} |\ln(\ln(1+r^{-1}))|^p \, r \, dr$$

Für $r \in (0, 1/2)$ gilt $1 + r^{-1} > 3 > e$ also $\ln(\ln(1+r^{-1})) > 0$, so dass wir die Betragsstriche weglassen können und $1+r^{-1}$ durch $2r^{-1}$ abschätzen können:

$$\int_U |u|^p \, d\lambda \leq 2\pi \int_0^{1/2} \ln(\ln(2r^{-1}))^p \, r \, dr$$

Mit der Substitution

$$t = \ln(2r^{-1}) = \ln(2) - \ln(r), \quad r = 2e^{-t}, \quad dt = -r^{-1} dr$$

erhalten wir

$$\int_U |u|^p \, d\lambda \leq 2\pi \int_{\ln(4)}^{\infty} \ln(t)^p \cdot 2e^{-t} \, dt < \infty$$

für alle p. Also gilt $u \in L^p(U)$ für alle $p \in [1, \infty)$

Gilt $u \in W^{1,p}(U)$? Wenn ja, dann müssen die schwachen Ableitungen $\partial_n u$ mit den klassischen Ableitungen

$$u_n(x) := (\ln(1 + |x|^{-1}))^{-1} \cdot (1 + |x|^{-1})^{-1} \cdot \left(-|x|^{-2} \cdot \frac{x_n}{|x|}\right)$$

in $U \setminus \{0\}$ übereinstimmen. Wir schätzen ab

$$|u_n(x)| \leq (\ln(1 + |x|^{-1}))^{-1} \cdot \frac{|x|^{-2}}{1+|x|^{-1}} = (\ln(1+|x|^{-1}))^{-1} \frac{|x|^{-1}}{1+|x|},$$

und erhalten (mit $t = \ln(r)$)

$$\int_U |u_n|^p \, d\lambda \leq 2\pi \int_0^{1/2} (\ln(1+r^{-1}))^{-p} \frac{1}{(1+r)^p} \cdot r^{-p+1} \, dr$$

$$\leq 2\pi \int_0^{1/2} (-\ln(r))^{-p} \, r^{-p+1} \, dr = 2\pi \int_{-\infty}^{-\ln(2)} (-t)^{-p} e^{(2-p)t} \, dt =: I(p)$$

Es gilt $I(p) < \infty \Leftrightarrow p \leq 2$.

Wir zeigen, dass für $p \leq 2$ die u_n die schwachen Ableitungen von u sind. Da $u \in L^1(U)$, gilt nach Lebesgue

$$-\langle u, \partial_n \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{U \setminus U(0,\varepsilon)} u \cdot \partial_n \varphi \, d\lambda$$ für

alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Der Satz von Gauß liefert

$$-\langle u, \partial_n \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{U \setminus U(0,\varepsilon)} \partial_n u \cdot \varphi \, d\lambda - \int_{S(0,\varepsilon)} \nu_n \, u \cdot \varphi \, dS$$

Da $u_n \in L^1(U)$ folgt wieder mit Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{U \setminus U(0,\varepsilon)} u_n \cdot \varphi \, d\lambda = \int_U u_n \cdot \varphi \, d\lambda$$

Für das Randintegral erhalten wir

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} \ldots \, dS \right| \leq \max\{|\varphi|\} \cdot \int_0^{2\pi} 1 \cdot \ln(\ln(1+\varepsilon^{-1}))\varepsilon \, dt$$

$$= \max\{|\varphi|\} \cdot 2\pi \ln(\ln(1+\varepsilon^{-1}))\, \varepsilon \to 0$$

Damit ist gezeigt, dass u für $p \leq 2$

zu $W^{1,p}(U)$ gehört.

Musterlösung zu den 24. 05. 2010
Präsenzaufgaben „Blatt 5"

Aufgabe 1:
Wenn wir Integration und Differentiation vertauschen dürfen, folgt sofort die behauptete Gleichung.

Seien hierzu y, φ gewählt
$y \in D \subset C^1([a,b])$
$\varphi \in C_0^1([a,b])$

Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$D_t := \frac{1}{t}\Big(F_y(x, y+t\cdot\varphi, y'+t\varphi') + F_{y'}(x, y+t\varphi, y'+t\varphi') - (F_y(x,y,y') + F_{y'}(x,y,y'))\Big)$$

$$= \frac{1}{t}\Big(F_y(x, y+t\varphi, y'+t\varphi') - F_y(x,y,y')\Big)$$

$$+ \frac{1}{t}\Big(F_{y'}(x, y+t\varphi, y'+t\varphi') - F_{y'}(x,y,y')\Big)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}\Big(F_y(x, y+s\varphi, y'+s\varphi')\Big)\,ds$$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}\Big(F_{y'}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi')\Big)\,ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(F_{yy}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi') + F_{yy'}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi')\Big)\,ds$$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^t F_{y'y}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi') + F_{y'y'}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi')\,ds$$

$$= F_{YY}(x, Y, Y') + F_{YY'}(x, Y, Y')$$

$$+ \frac{1}{t} \int_0^t F_{YY}(x, Y+se, Y'+se') - F_{YY}(x, Y, Y') \, ds$$

$$+ \frac{1}{t} \int_0^t F_{YY'}(x, Y+se, Y'+se') - F_{YY'}(x, Y, Y') \, ds$$

$$+ F_{YY'}(x, Y, Y') + F_{Y'Y'}(x, Y, Y')$$

$$+ \frac{1}{t} \int_0^t F_{YY'}(x, Y+se, Y'+se') - F_{YY'}(x, Y, Y') \, ds$$

$$+ \frac{1}{t} \int_0^t F_{Y'Y'}(x, Y+se, Y'+se') - F_{Y'Y'}(x, Y, Y') \, ds$$

$$=: I_1(x, Y) + I_2(x, Y) + R_1(t, x, Y) + R_2(t, x, Y)$$

$$+ I_3(x, Y) + I_4(x, Y) + R_3(t, x, Y) + R_4(t, x, Y)$$

Wir zeigen $R_i \to 0$ für $t \to 0$ $i = 1..4$

Da mit t auch s gegen 0 konvergiert, sei $|s| < \varepsilon/2$. Weiter sind Y und e differenzierbar und somit

$$\{ (x, Y+se, Y'+se') \mid x \in I, |s| < \tfrac{\varepsilon}{2} \}$$

$$\subset [a, b] \times [-c, c] \times [-c', +c'] =: J \subseteq \mathbb{R}^3$$

$c, c' \in \mathbb{R}$

Wir betrachten R_2, $F_{YY'}$ ist auf dem kompaktum J gleichmäßig stetig, also gilt

$$\left| F_{yy'}(x, y+s\varphi, y'+s\varphi') - F_{yy'}(x,y,y') \right| < \tilde{\varepsilon} \quad (1)$$

sofern $|s| \left(|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| \right) < \delta(\tilde{\varepsilon})$

und $|s| < \frac{\varepsilon}{4}$

Wegen $|\varphi(x) + \varphi'(x)| \leq \|\varphi\|_{1,[a,b]}$ ist

(1) für $|s| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\delta(\tilde{\varepsilon})}{\|\varphi\|_{1,[a,b]}} \right\}$

erfüllt.

Analoge Abschätzungen erhalten wir auch für R_1, R_3, R_4.

Es folgt also

$$|D_t - I_1 - I_2 - I_3 - I_4|$$

$$\leq \frac{1}{|t|} |t| \tilde{\varepsilon} \left(|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| \right) \leq \tilde{\varepsilon} \|\varphi\|_{1,[a,b]} < \hat{\varepsilon}$$

für gegebenes $\hat{\varepsilon}$, sofern nur

$$0 < |t| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\delta(\tilde{\varepsilon})}{\|\varphi\|_{1,[a,b]}} \right\}$$

und $0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{\hat{\varepsilon}}{\|\varphi\|_{1,[a,b]}}$.

Also erfolgt die Konvergenz gleichmäßig und wir dürfen tatsächlich Differentiation und Integration vertauschen.

Aufgabe 2:

(a) $I(y) = \int_0^1 y' \, dx = y(1) - y(0) = 1$

Das Funktional ist also konstant.

Jedes zulässige y erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung.

(b) $I(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(y^2\right) dx = \frac{1}{2}\left(y(1)^2 - y(0)^2\right) = \frac{1}{2}$

Wieder ist I konstant.

(c) $I(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 x \frac{d}{dx}(y^2) \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \, dx + \frac{1}{2}$

für alle zulässigen y.

Mit $y_n(x) = x^n$ ist $\int_0^1 y_n^2 \, dx = \frac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow \sup_{y \in D} I(y) = \frac{1}{2}$

Es gibt jedoch kein $y \in D$ mit

$I(y) = \frac{1}{2}$. Dann müsste

$\int_0^1 y^2 \, dx = 0$ gelten, mithin $y \equiv 0$

aber $y \equiv 0 \notin D$.

Aufgabe 3:

(a) Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$2\frac{d}{dx}y' = 2 \qquad \text{oder} \qquad y'' = 1$$

Mit den RB erhalten wir $y(x) = \frac{1}{2}(x^2+x)$

Unter Verwendung der Hausübung 3 des aktuellen Blatt erhalten wir

$$\delta^2 I(\tilde{y})(\varphi,\varphi) = 2\int_0^1 (\varphi')^2 \, dx \geq 0$$

für alle zulässigen $\hat{y}$.

Also ist y ein Minimierer.

(b) $$2\frac{d}{dx}(y'+y) = 2y' \qquad \text{oder} \qquad y'' = 0$$

Mit den RB folgt $y(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Weiter ist für $\hat{y}$ zulässig

$$\delta^2 I(\tilde{y})(\varphi,\varphi) = 2\int_{-1}^{2} (\varphi')^2 + 2\varphi\varphi' \, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{2} (\varphi')^2 + \frac{d}{dx}\varphi^2 \, dx = 2\int_{-1}^{2} (\varphi')^2 \, dx \geq 0$$

Also ist y ein Minimierer.

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da φ kompakten Träger hat in $[-1,2]$.