

Analysis III, Übung 1

Gruppenübung:

Aufgabe 1.

Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, x + y).$$

ein Vektorfeld und $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ die Kurve, die entsteht, wenn man den Rand des Quadrates $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ betrachtet. Bestimmen Sie das Wegintegral von F längs Γ .

Aufgabe 2. (Vivianisches Fenster)

Definiere

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^3} x$$

sowie den Weg

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 2 \sin(t/2)).$$

Bestimmen Sie das Wegintegral von f über den Weg γ .

Aufgabe 3. (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Gegeben sei folgende Parametrisierung der Astroide:

$$\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t)^3, \sin(t)^3).$$

Bestimmen Sie eine Parametrisierung r derart, dass $r : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie ausserdem, dass dann für alle $s \in [0, L(\Gamma)]$ gilt:

$$\|r'(s)\| = 1.$$

Hinweis: Betrachte hierzu $S(t) := \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$

Abgabe bis zum 27.10.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend numeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Bogenlänge des folgenden Weges:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Aufgabe 2.

Wir definieren den Schwerpunkt einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, die wie gewohnt durch einen Weg γ parametrisiert sei, durch:

$$\vec{S} = (S_{x_1}, S_{x_2}, \dots, S_{x_n}), \quad S_{x_i} := \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\gamma} x_i dx.$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt für

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), h \cdot t), h \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 3.

Sei eine Punktmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ dargestellt durch eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

Es gibt eine Parametrisierung r derart, dass $r : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\|r'(s)\| = 1$ für alle $s \in [0, L(\Gamma)]$