

Analysis III, Übung 2

Gruppenübung:

Aufgabe 1

Beschreiben Sie den Weg eines Punktes auf dem Rand eines Kreises vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$, der im Inneren eines Kreises vom Radius $R > r$ auf dem letzteren „abrollt“. Bestimmen Sie die Längen von Stücken von der entstehenden Kurve γ mit Hilfe der Formel für die Kurvenlänge.

Aufgabe 2.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z \\ -y - z \\ x - y + 17 \end{pmatrix}$. Besitzt f eine Stammfunktion F ? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Hat das lineare partielle Differentialgleichungssystem $\nabla u = f$ eine Lösung? Wenn ja, finden Sie diese. Hierbei sei f gegeben durch

$$(i) \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)} \\ \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$
$$(ii) \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 2xz^2 \\ 2x^2y + 2z^2y \\ 2x^2z + 2y^2z \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingung muss an den Definitionsbereich von f gestellt werden?

Aufgabe 3.

Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ auch σ -Algebren sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ endlich oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ endlich}\}.$$
$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\}.$$
$$\mathcal{S} = \{(a, b), [a, b], (a, b], [a, b] \mid a \leq b\}.$$

Abgabe bis zum 3.11.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend numeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1. 4 Punkte

Beschreiben Sie den Weg eines Punktes auf dem Rand eines Kreises vom Radius $r \in \mathbb{R}_+$, der auf einem Kreis vom Radius R „abrollt“. Bestimmen Sie die Längen von Stücken von der entstehenden Kurve γ mit Hilfe der Formel für die Kurvenlänge.

Aufgabe 2. 1+2+2 Punkte

Es sei $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}^2, V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$.

Besitzt V eine Stammfunktion?

Wie muss die Funktion verändert werden, damit V eine Stammfunktion besitzt. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von V .

Hat das lineare partielle Differentialgleichungssystem $\nabla u = f$ eine Lösung? Wenn ja, finden Sie diese. Hierbei sei f gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sinh(x+y) + \cosh(x-y) \\ \sinh(x+y) - \cosh(x-y) \end{pmatrix}.$$
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y - \exp(x^2 y^2) 2xy^2 z^2 \\ \frac{1}{\sqrt{1-y^2 z}} + 2x - \exp(x^2 y^2) 2yx^2 z^2 \\ -\frac{\arcsin(y)}{z^2} - \exp(x^2 y^2) 2z \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingung sollte der Definitionsbereich erfüllen?

Aufgabe 3. 4 Punkte

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine abzählbare Familie mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$. Zeige: dann ist

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

eine σ -Algebra in $\mathbb{R}$.