

Analysis III, Übung 3

Gruppenübung:

Aufgabe 1.

Wir wollen beweisen: Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar. Wir wollen dies beweisen, indem man die Elemente „in einer unendlichen Matrix anordnet und diese entlang der Nebendiagonalen durchläuft“. Geben Sie explizit eine entsprechende bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an.

Aufgabe 2.

Sei $X = (0, 1)$ und $\mathcal{A} = (0, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N} \setminus 0$. Sei $\mathcal{S}$ kleinste σ -Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

Gehört $[\frac{1}{120}, \frac{1}{6})$ zu $\mathcal{S}$?

Bestimme $\mathcal{S}$.

Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ messbar ist.

Bestimme alle messbaren Funktionen $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Aufgabe 3.

Entscheide, ob die Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & : x \neq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{q} & : \text{wenn } x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd und } p > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Abgabe bis zum 10.11.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend numeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1. 5 Punkte

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man „algebraisch“, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. (Z.B. ist $\sqrt{2}$ als Lösung von $x^2 - 2 = 0$ algebraisch, aber natürlich auch jede rationale Zahl q als Lösung von $x - q = 0$.) Zeigen Sie, dass auch die algebraischen Zahlen abzählbar sind. Benutzen Sie hierfür, dass sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{Q}^N$, $N \in \mathbb{N}$ abzählbar sind.

Aufgabe 2. 4+3+3 Punkte

Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$. Weiter sei $\mathcal{S}$ die kleinste σ -Algebra in X , die $\mathcal{A}$ enthält.

Bestimme $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$?

Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i) \quad f(x) = (x - 3)^2, \quad (ii) \quad f(x) = \left| x - \frac{7}{2} \right|.$$

Aufgabe 3. 4+2 Punkte

Beweisen Sie Lemma 2.3. Ist auch die Vereinigung zweier σ -Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ wieder eine σ -Algebra?