

## Analysis III, Übung 4

### Gruppenübung:

#### Aufgabe 1.

Beweise, dass jede monoton wachsende Funktion

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

messbar ist.

#### Aufgabe 2.

(1) Es sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Zeigen Sie, dass

$$f[\mathcal{S}] := \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra ist.

(2) Es seien  $(X_1, \mathcal{S}_1), (X_2, \mathcal{S}_2)$  messbare Räume und  $f : X_1 \rightarrow X_2$  eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ messbar} \Leftrightarrow \mathcal{S}_2 \subset f[\mathcal{S}_1]$$

#### Aufgabe 3.

Bestimmen Sie das Lebesguemaß folgender Mengen

$$(i) \quad A_1 = \emptyset$$

$$(ii) \quad A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \in (1, 2)\}$$

(iii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{Q}$  und  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  Borelmengen sind. Bestimmen Sie das Lebesguemaß der beiden Mengen.

Abgabe bis zum 17.11.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

## Hausübung:

### Aufgabe 1. 7 Punkte

Sei  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Sei  $\{x : f(x) = c\}$  messbar für alle  $c \in \mathbb{R}$ . Folgt daraus, dass die Funktion  $f(x)$  messbar ist?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es auf  $\mathbb{R}$  nicht Borel-messbare Mengen gibt.

### Aufgabe 2. 4 Punkte

Sei  $f_n : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass die Menge  $L$  aller  $x \in X$ , für die  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  existiert, messbar ist.

### Aufgabe 3. 2+2 Punkte

(a) Da  $\mathbb{Q}$  eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine Bijektion  $q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto q_n$ . Zeige, dass

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n}) \neq \emptyset.$$

(b) Finde zu  $\epsilon > 0$  eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  vom Maß  $\lambda(U) < \epsilon$  derart, dass  $U$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist. D.h.  $U \cap V \neq \emptyset$  für jede nichtleere offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}$ .