

Analysis III, Übung 5

Gruppenübung:

Aufgabe 1. Sei A eine Aussagenform über $X := \mathbb{R}^N$. Man sagt „ A gilt fast überall (f.ü)“, wenn es eine Lebesgue-Nullmenge N gibt mit

$$\forall x \in X \setminus N : A(x).$$

Die Funktionenfolge $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere punktweise f.ü gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. A sei eine messbare Teilmenge von X mit Maß ungleich 0. Zeigen Sie:

(i) $\forall k \in \mathbb{N} : f_k \geq 0 \text{ f.ü} \Rightarrow f \geq 0 \text{ f.ü.}$

(ii) $(f \geq 0 \text{ auf } A \wedge \int_A f d\mu = 0) \Rightarrow f = 0 \text{ f.ü.}$

Aufgabe 2.

Wir wollen die Translationsinvarianz des Lebesguemaß beweisen.
Für eine Menge A definieren wir die verschobene Menge

$$A + a := \{a + x : x \in A\}.$$

Sei λ das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Wir wollen also zeigen, dass für eine Lebesguemeßbare Menge A

$$\lambda(A) = \lambda(a + A)$$

gilt.

Aufgabe 3.

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass $\mu(a, b) < \infty$, falls $a < b$ reell sind.
Weiter sei

$$F(x) = \begin{cases} \mu(0, x], & \text{falls } x > 0 \\ -\mu(0, x], & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F genau dann stetig in x ist, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ ist.

Abgabe bis zum 24.11.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend numeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1. 3+4 Punkte

Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $S \in \mathcal{M}$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei meßbar. Zeigen Sie:

(i) $[(f = 0 \text{ f.ü.}) \wedge (f \text{ stetig})] \Rightarrow f = 0$

(ii) $(\forall A \in \mathcal{M} \int_{A \cap S} f d\mu = 0) \Rightarrow f|_S = 0 \text{ f.ü.}$

Anmerkung: In der zweiten Aussage stand versehentlich statt $f|_S = 0 \text{ f.ü.}$ nur $f|_S = 0$. Dann wird die Aussage natürlich falsch. X sei hier der $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. 7 Punkte

Sei μ ein translationsinvariantes Maß in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass $\mu = c\lambda$, wobei $c \geq 0$ und λ das Lebesguemaß ist.

Hinweise:

$c = \mu([0, 1))$. Das heißt also, dem Intervall $[0, 1)$ soll ein endliches Maß $c \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet werden.

$$[0, 1) = \bigcup_{k=1}^n \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right).$$

$$\mu([0, \frac{p}{q})) = ?, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Für $a < b$ approximiere $b-a$ durch eine fallende Folge rationaler Zahlen.

Aufgabe 3. 2+3 Punkte

(i) Beweisen Sie, dass $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1]$ ist und bestimmen Sie das Lebesgueintegral $\int_{[0,1]} f(x) d\lambda(x)$.

(ii) Finden Sie eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften haben:

Für alle $x \in [0, 1]$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_{[0,1]} f_n(x) d\lambda = 1$