

1. H

$$(i) \left. \begin{array}{l} f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ f = 0 \quad \text{f.ü.} \end{array} \right\} \Rightarrow f = 0$$

~~Annahme~~ : $\exists N$ (Nullmenge) $\forall x \in X \setminus N \quad f(x) = 0$

Nehmen wir das Gegenteil an, also $f \neq 0$.

Dann gibt es ein $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < f(\hat{x}) < \infty$.

Da f stetig ist

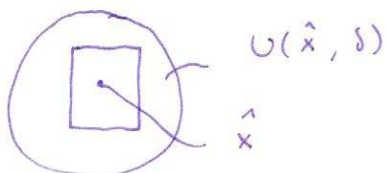
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \in U(\hat{x}, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(\hat{x}), \varepsilon)$$

Wir setzen $f(\hat{x}) =: \varepsilon$

$$f(x) \in U(f(\hat{x}), \varepsilon) \Leftrightarrow |f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon$$

$$\text{Wir erhalten} \quad f(\hat{x}) - f(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in U(\hat{x}, \delta)$$



Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen

$$Q \text{ da} \quad \tilde{Q} := Q(\hat{x} - \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \hat{x} + \varepsilon \cdot \mathbf{1}) \subset U(\hat{x}, \delta)$$

$\mathbf{1}$ bedeutet $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

Sei $x \in \tilde{Q}$, dann gilt $|x_j - \hat{x}_j| < \varepsilon \quad \forall j=1, \dots, n$

$$\Rightarrow \|x - \hat{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - \hat{x}_j)^2 \right)^{1/2} < (n \varepsilon^2)^{1/2} < \sqrt{n} \varepsilon \leq \delta$$

Die letzte 1.H Ungleichung können wir sicher erreichen, indem wir δ klein genug wählen, z. B. $\delta \leq \frac{\delta}{\sqrt{\mu}}$

Es ist $\tilde{Q} \subset U(\hat{x}, \delta)$ und

$$0 < \lambda(\tilde{Q}) = (2\delta)^n$$

Also ist f auf einer Menge vom Maß $\lambda(\tilde{Q}) > 0$. Das ist ein Widerspruch zu $f = 0$ f.ü.

(ii) Für $\alpha > 0$ betrachten wir

$$S_\alpha^+ := S \cap f^{-1}(\alpha, \infty) = \{x \in S : f(x) > \alpha\}$$

$$S_\alpha^- := S \cap f^{-1}(-\infty, -\alpha) = \{x \in S : f(x) < -\alpha\}$$

welche meßbar sind, da S und f meßbar sind.

Es folgt nach Voraussetzung mit $A := f^{-1}((\alpha, \infty))$

$A \in \mathcal{M}$

$$\mu(S_\alpha^+) = \frac{1}{\alpha} \int_{S_\alpha^+} \alpha \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int_{S_\alpha^+} f \, d\mu = 0$$

und analog $\mu(S_\alpha^-) = 0$. Also ist

$$\{x \in S : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_{\frac{1}{n}}^+ \cup S_{\frac{1}{n}}^-)$$

als Vereinigung von Nullmengen eine

Nullmenge, d. h. $f|_S = 0$

2H

Es gilt

$$\begin{aligned} c &= \mu([0, 1]) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu\left(\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = \sum_{j=1}^n \mu\left([0, \frac{1}{n})\right) = n \cdot \mu\left([0, \frac{1}{n})\right) \end{aligned}$$

(*) gilt wegen der Translationsinvarianz.

$$\Rightarrow \mu\left([0, \frac{1}{n})\right) = \frac{c}{n}$$

Analog zeigt man für $p, q \in \mathbb{N}$

$$\mu\left([0, \frac{p}{q})\right) = \frac{c \cdot p}{q}$$

Für $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ findet man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ mit x_n fällt monoton gegen x .

Wieder aus Lemma 2.17 (d) folgt:

$$\mu([0, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot x$$

Also folgt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\mu([a, b]) = \mu([0, b-a]) = c \cdot (b-a)$$

$\Rightarrow \frac{1}{c} \cdot \mu$ ist ein Borelmaß, das Intervallen ihre Länge zuordnet. Das heißt

aber $\frac{1}{c} \cdot \mu = \lambda$ ist das Lebesguemaß

3H

(i) Die Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist messbar.

$$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, x \in [0, 1] \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, x \in [0, 1] \end{cases}$$

Also ist $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ eine Stufenfunktion, die insbesondere nichtnegativ ist.

Da $\lambda([0, 1]) < \infty$ folgt, dass sie Lebesgue integrierbar ist.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \int_{[0, 1]} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} d\lambda &= 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0 \cdot \lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ Setze } f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

$$\text{und } \int_{[0, 1]} f_n(x) d\lambda = \frac{1}{n} \cdot \int_{[0, 1]} \chi_{[0, \frac{1}{n}]} d\lambda$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$