

Analysis III, Übung 6

Gruppenübung:

Aufgabe 1.

Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ eine Folge von Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, wenn $\mu(X) < \infty$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Gilt dies auch noch, wenn $\mu(X) = \infty$?

Aufgabe 2.

Es sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wie im Skript bestehe $\tilde{\mathfrak{S}}$ aus allen Teilmengen von X , die Vereinigung einer Menge aus $\mathfrak{S}$ und einer μ -Nullmenge sind. Sei $E \in \mathfrak{S}$ und N eine μ -Nullmenge. Sodann definieren wir $\tilde{\mu}(E \cup N) := \mu(E)$. Wir wollen beweisen:

$$(X, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mu})$$

ist ein vollständiger Maßraum. Dabei heißt ein Maßraum $(X, \mathfrak{R}, \nu)$ vollständig, wenn jede ν -Nullmenge von X zu $\mathfrak{R}$ gehört.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{L}^p$ die Menge der Lebesgue integrierbaren Mengen im $\mathbb{R}^p$. Beweisen Sie:

Zu jeder Menge $A \in \mathcal{L}^p$, $A \subset \mathbb{R}^p$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Obermenge $U \supset A$ mit $\lambda(U \setminus A) < \epsilon$ und eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset A$ mit $\lambda(A \setminus F) < \epsilon$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx \sin(x)}{n^2 x^2 + 1} dx,$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \int \frac{n^2 x^2}{2n^2 x^5 + n \exp(x) + 3} dx,$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-x) dx$

Abgabe bis zum 1.12.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1. 3+3 Punkte

Entscheide, ob die folgenden Funktionen $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind und bestimme gegebenenfalls das Lebesgueintegral.

(1) $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}})}, E = [0, 1)$

(2) $f(x) = [\frac{1}{x}], E = (0, 1]$, wobei $[a]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als a ist.

Aufgabe 2. 2 Punkte

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, $f : (X, \mathfrak{S}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar und $c > 0$.

Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X |f| d\mu$$

Aufgabe 3. 4+4 Punkte

Wir nennen eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine G_δ -Menge, wenn M darstellbar ist als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen und M heißt eine F_σ -Menge, wenn sie darstellbar ist als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen. Beweisen Sie:

Zu jeder Menge $A \in \mathcal{L}$ gibt es eine G_δ -Menge $B \supset A$ und eine F_σ -Menge $C \subset A$ mit $\lambda(B \setminus A) = \lambda(A \setminus C) = 0$.

Beweisen Sie weiterhin:

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset A \subset U$ existieren, so dass $\lambda(U \setminus F) < \epsilon$.

Aufgabe 4. 1+1+3 Punkte

Finden Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{\exp(nx) + n^2 x} dx,$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \arctan\left(\frac{n \exp^x}{\sin(x)}\right) dx.$

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n^2} f(x) dx = 0$$