

Analysis III, Übung 8

Gruppenübung:

Aufgabe 1. Volumen eines Rotationskörpers

Es sei $r : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ eine meßbare Funktion. Wir wollen das Volumen des Rotationskörpers

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r(z) \right\} = h^{-1}([0, \infty[)$$

mit $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y, z) = r(z) - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zeigen Sie, dass

(a) $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$,

(b) $\lambda_3(M) = \pi \int_{\mathbb{R}} r(z)^2 d\lambda_1(z)$.

Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen der Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \geq 1 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z^{-\alpha} \right\}.$$

Aufgabe 2.

Berechnen Sie $\lambda_2(A)$ und $\lambda_2(B)$, wobei

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 < 3|x| - x_1\}$$

$$B := \{x \in A : x_2 > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0\}$$

Aufgabe 3.

Es seien A eine positiv definite symmetrische $(n \times n)$ -Matrix und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

(1) Bestimme das Volumen des durch $f(x) \leq 1$ beschriebenen Ellipsoids, also $\lambda(\{x : f(x) \leq 1\})$. Hierbei darf das Volumen ω_n der n -dimensionalen Einheitskugel als bekannt angenommen werden.

(2) Berechnen Sie auch das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)} dx.$$

Abgabe bis zum 22.12.2010 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsicht-hüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1: 5+1+2+2 Punkte

(i) Für eine meßbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\tilde{B} := \{\tilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} : b \in B\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Weiterhin sei $s := \begin{pmatrix} m \\ h \end{pmatrix}$ mit $m \in \mathbb{R}^2$ und $h \in \mathbb{R}_+$. Dann nennt man

$$C := C(B, s) := \{(1 - \tau)\tilde{b} + \tau s : \tau \in (0, 1) \wedge \tilde{b} \in B\}$$

den „verallgemeinerten Kegel“ mit „Basis“ B und „Spitze“ s . Drücken Sie

$$\int_C f \lambda_3$$

durch s und $\lambda_2(B)$ aus.

(ii) Drücken Sie sodann $\lambda_3(C)$ durch s und $\lambda_2(B)$ aus, indem sie ein spezielles f wählen.

(iii) Was ergibt sich in den Spezialfällen $m = 0, h = 2$ und

$$B := \{b \in \mathbb{R}^2 : b_1^2 + 4b_2^2 < 1\}$$

$$B := Q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

Tip: Die Darstellung von C als Bildmenge kann man als „Substitution“ ansehen.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Für $a \in \mathbb{R}_+$ sei

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^{2/3} + |x_2|^{2/3} < a^{2/3}\}.$$

Berechnen Sie $\lambda_2(A)$.

Tip: Erst einmal $\lambda_2(A \cap \mathbb{R}_+)$ berechnen.

Aufgabe 3: 2+5 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$M := \left\{ x, y, z \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

wobei $a, b, c > 0$. Benutzen Sie hierbei das Prinzip von Cavalieri und die Aufgabe vom letzten Blatt.

Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ entsteht.