

## Analysis III, Übung 10

### Gruppenübung:

#### Aufgabe 1: Fast überall punktweise Konvergenz

Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^1(\mu)$ . das heißt, jedes  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei meßbar und es gelte

$$\|f_m - f_n\|_{1,\mu} = \int_M |f_m - f_n| d\mu \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Zeigen Sie, dass  $(f_n)$  eine Teilfolge hat, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert.

Folgern Sie hieraus die Vollständigkeit von  $L^1(\mu)$ .

Hinweise: Konstruiere eine Teilfolge  $(f_{n_j})$  mit

$$\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_{1,\mu} < \frac{1}{2^j}.$$

Beweisen Sie, dass  $g := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^1(\mu)$ . Verwenden Sie  $f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$  als Kandidaten für die Grenzfunktion.

#### Aufgabe 2:

Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\alpha}{1 + |x|^\beta} < \infty ?$$

#### Aufgabe 3:

Für eine meßbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^3$  nennt man in der Mechanik den Vektor

$$s(A) := \frac{1}{\lambda_3(A)} \int_A x d\lambda_3(x)$$

den „Schwerpunkt“ von  $A$ . Weiterhin nennt man für eine Gerade  $g$  das Integral

$$T(A, g) = \int_A \text{dist}(x, g)^2 d\lambda_3(x)$$

das „Trägheitsmoment von  $A$  bei Rotation um die Achse  $g$ “.

Dabei ist für eine Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^N$

$$\text{dist}(x, B) := \inf\{|x - y|_2 : y \in B\}.$$

Beweisen Sie den Satz von Steiner: Für parallele Geraden wird das Trägheitsmoment minimal, wenn die Drehachse den Schwerpunkt enthält; Parallelverschieben der Drehachse aus dem Schwerpunkt um die Länge  $l$  vergrößert das Trägheitsmoment um  $\lambda(A) \cdot l^2$ .

Abgabe bis zum 12.1.2011 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsicht-hüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

## Hausübung:

### Aufgabe 1: 3+2+1 Punkte

(a) Es sei  $X$  eine Menge,  $x \in X$  und  $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  die durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion. Prüfen Sie nach, dass  $\delta_x$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{P}(X))$  ist.

(b) Gegeben sei eine Menge  $X$  und  $x \in X$ . Zeigen Sie, dass

$$\int_X f \, d\delta_x = f(x)$$

für jede Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

(c) Was bedeutet fast überall Konvergenz bezüglich des Maßes  $\delta_x$ ?

### Aufgabe 2: 5 Punkte

Es seien  $p, q, a, b$  reelle Zahlen mit  $0 < p < q$  und  $0 < a < b$ . Abschnitte der Parabeln

$$y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$$

bilden ein krummlinig berandetes Viereck  $M$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $M$  mittels des Transformationssatzes und einer Koordinatentransformation

$$T : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad T(u, v) = (x, y)$$

die bewirkt, dass die Parabelstücke als Koordinatenlinien  $\{u = \text{const}\}$  und  $\{v = \text{const}\}$  erscheinen.

### Aufgabe 3: 3+1+1 Punkte

Für

$$B := \{x \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{n=1}^N x_n^{1/2} < 1\}, \quad \mathbb{R}_+^N := \{x \in \mathbb{R}^N : x_n > 0, n = 1 \dots N\}$$

soll  $\lambda_N(B)$  berechnet werden. Führen Sie dieses Problem mit Hilfe einer Substitution in ein einfacheres über und lösen Sie es dann in den Fällen  $N = 2$  und  $N = 3$ .

### Aufgabe 4: 2 Punkte

Was wäre ein verallgemeinerter  $N$ -dimensionaler Kegel? Wie würde die Formel für dessen Maß lauten?

### Aufgabe 5: 2+2 Punkte

Berechnen Sie

$$\lambda_4(M), \quad M := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 + x_2^2 < x_3^2 + x_4^4 < 1\}$$

$$\int_A x_3^3 \exp(-x_3^2[1 + x_1^2 + x_2^2]) d\lambda_3(x), \quad A := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

**Aufgabe 6: 3 Punkte**

Bestätigen Sie den Satz von Steiner anhand des Beispiels einer Kugel  $A := K(0, r)$  für Drehachsen der Form

$$g := \{m + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R}\}, \quad m \in \mathbb{R}^3.$$

**Aufgabe 7: 2+2+2 Punkte**

$$\int_A x_1 x_2 x_3 \, dx = ?, \quad A := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1\}$$

$$\int_B \exp(x_2^2) \, dx = ?, \quad B := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < x_2 < 1\}$$

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} x_2 (4 - x_2^2)^{1/2} \, dx = ?$$

**Aufgabe 8: 3 Punkte**

Berechnen Sie  $\lambda_3(\Omega)$ , wenn  $\Omega := Z_1 \cap Z_2$  der Schnitt zweier Kreiszylinder

$$Z_n := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_n^2 + x_3^2 < 1\}, \quad n = 1, 2$$

ist.

**Aufgabe 9: 3 Punkte**

Sei  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$ . Überführen Sie  $V$  in einen Kreis und lösen Sie dann

$$\int_V e^{-(x^2+4y^2)} d\lambda_2$$

**Aufgabe 9: 3 Punkte**

Skizzieren Sie den Körper, welcher von  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$  begrenzt wird und bestimmen Sie sein Volumen.

**Aufgabe 10: 1+1+1 Punkte**

Sei  $f$  integrierbar. Ändern Sie die Integrationsreihenfolge der folgenden iterierten Integrale. Machen Sie sich dies auch an einer Skizze klar.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx \\ & \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

**Aufgabe 11: 5 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der Transformation  $u = y/x$ ,  $v = xy$  das Integral

$$\int_V xy^3 \, d\lambda_2,$$

wobei  $V \subset \mathbb{R}^2$  von den Kurven  $y = x$ ,  $y = 3x$ ,  $xy = 1$  und  $xy = 4$  begrenzt sei. Machen Sie sich zunächst klar, wie die Menge  $V$  genau beschaffen ist.

**Viel Erfolg und frohe Weihnachten sowie einen guten Rutsch in das neue Jahr.**