

Analysis III, Übung 11

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

Es sei $V \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann nennen wir

$$\operatorname{div} F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die Divergenz von F . Ist $N=3$, so definieren wir weiter die Rotation

$$\operatorname{rot} F : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \operatorname{rot} F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $N=3$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} u) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) &= 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \Delta u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

gelten. Im ersten Fall ist $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und im zweiten sowie dritten Fall bildet u nach $\mathbb{R}$ ab. In allen drei Fällen ist u zweimal stetig differenzierbar.

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie, ob die folgende Abbildung $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion und eine Einbettung ist. Entscheiden Sie, ob $\phi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

- (1) $U = \mathbb{R}^2$ und $\phi(x, y) = (2x + 3y, x - y, xy)$.
- (2) $U = (0, 1) \times (0, \pi)$ und $\phi(x, y) = (x \cos(y), x \sin(y), x + y)$.
- (3) $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\phi(t) = (2t^2 + 3, \sin^2(t), \cos^2(t))$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen der folgenden Flächen im $\mathbb{R}^3$:

- (1) $z = xy$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$,
- (2) $Z = 2x + 3y + 4$ mit $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$,
- (3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq x$,
- (4) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a \leq x \leq b, z \geq 0\}$, wobei $-R \leq a < b \leq R$ ist.

Abgabe bis zum 19.1.2011 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1: 3+3 Punkte

Wir betrachten die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

und die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Berechnen Sie das Integral $\int_M f \, dS_M$ auf folgende Weisen:

- (i) Fasse M als Rotationskörper auf, der durch Rotation der Kurve $z = x^2, 0 < x < 1$, um die z -Achse entsteht.
- (ii) Fasse M als Graphen einer Funktion auf dem offenen Einheitskreis auf.

Aufgabe 2: 2+2+2 Punkte

Entscheiden Sie, ob die Menge M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Falls ja, geben Sie ihre Dimension sowie einen Umgebungsatlas (aller Karten, durch die die Menge M dargestellt wird) an.

- (1) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3e^x + xy + z = 1\}$.
- (1) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - x + xyz = 0\}$.
- (1) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos^2(x) + x^2y - z = 2, \ln(1 + x^2) + y + z = 3\}$

Aufgabe 3: 2+2 Punkte

Sei $a > 0$. Berechnen Sie die folgenden Flächenintegrale:

$$\begin{aligned} \int_M y^2 z \, dS_M, \quad M &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \\ \int_M z^4 \, dS_M, \quad M &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2\} \end{aligned}$$