

Analysis III, Übung 12

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

Seien $z, r \in C^1(I)$ mit $r > 0$ und $I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall. Sei entweder $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x, y, z(t)) : x^2 + y^2 = r(t)^2, t \in I\}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Zeigen Sie, dass die Mengen $M_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z = 1, 4 < z < 9\}$ und $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2(x^2 + y^2) = r^2(a + z)^2, 0 < z < a, r > 0, a > 0\}$ 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 2:

Seien $0 < r < R < \infty$. Zeigen Sie, dass der Torus

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Parametrisierung $\psi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r \cos(v)) \cos(u) \\ (R + r \cos(v)) \sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Flächenmaß sowie den Schwerpunkt für den Graphen G_h der Funktion $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$. Hierbei sei $U := \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1, u_2 > 0 \wedge u_1^2 + u_2^2 < 1\}$.

Abgabe bis zum 26.1.2011 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1: 2+2 Punkte

Berechnen Sie die Oberflächen folgender Körper im $\mathbb{R}^3$, indem Sie jeweils die Oberfläche geeignet parametrisieren:

Ein Zylinder Z der Höhe h mit Radius r .

Ein Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 < z < 4\}$

Aufgabe 2: 3+2+2 Punkte

Sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $h : U \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) := x^2 + y^2$. Begründen Sie:

Der Graph $M := \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in U\}$ der C^1 -Funktion h ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $S_M(M)$.

(ii) Berechnen Sie das Integral $\int_M f \, dS_M$ der Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := x^2$ über die Fläche M .

Aufgabe 3: 3 Punkte

Berechnen Sie den „Fluß“

$$\int_F \langle n, v \rangle \, dS$$

des Vektorfeldes

$$v(x) := |x| \begin{pmatrix} x_1 + \cos(x_2) \cdot x_3 \\ -x_1 \cdot \exp(x_3) + x_2 \\ x_1 \cdot x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$F := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}.$$