

Analysis III, Übung 13

Gruppenübung:

Wenn nichts anderes gesagt wird, sollen alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ glatte Gebiete der Klasse C^1 sein, deren äußere Einheitsnormale wie im Skript definiert ist.

Aufgabe 1:

Sei F die Oberfläche des Körpers $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$A(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z),$$

und die Normale auf F sei nach aussen gerichtet. Berechnen Sie das Integral von A über F zuerst direkt und dann mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Aufgabe 2:

Sei ∂F der Rand der Fläche $F := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$A(x, y, z) := (3y, -xz, yz^2),$$

und ∂F werde im Uhrzeigersinn durchlaufen, wenn man in die Richtung der Flächennormalen blickt. Berechnen Sie das Integral von A entlang ∂F zuerst direkt und dann mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3:

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0, r \in \mathbb{R}$ bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0 . Wir betrachten den sogenannten „Fluss“ $\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial K_r}(x)$ von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0 (wobei $\nu : \partial K_r \rightarrow \mathbb{R}^3$ jeweils das äußere Normalenfeld ist).

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} = \operatorname{div} F(x_0)$$

Abgabe bis zum 2.2.2011 um 10:00 in den Holzkasten neben dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsichthüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit.

Hausübung:

Aufgabe 1: 2+3 Punkte

Gegeben sei die halbe Mantelfläche des Zylinders definiert durch

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 2, y \geq 0\}.$$

Berechnen Sie für $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $A(x, y, z) = (yz + z^2, zx, z + xy)$

$$\int_F \langle A(x), \nu(x) \rangle dS_F(x)$$

direkt und mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 2: 2+2 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Formeln für $f, g \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ und $u, v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla f, u \rangle d\lambda &= - \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} u d\lambda + \int_{\partial\Omega} f \cdot \langle n, u \rangle dS \\ \int_{\Omega} \Delta g \cdot f d\lambda &= - \int_{\Omega} \langle \nabla g, \nabla f \rangle d\lambda + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} g \cdot f dS \end{aligned}$$

n bezeichne hierbei die äußere Normale $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ wie im Skript definiert.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten das beschränkte C^1 -Gebiet $\Omega := \{(x, y, z) : x^2 + y^4 + z^6 < 1\}$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := (x^2 y^3, xz + xy^4, \cos(xy)).$$

Bestimmen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(x, y, z), \nu(x, y, z) \rangle dS_{\partial\Omega},$$

indem Sie es in ein geeignetes Volumenintegral umschreiben. ν bezeichnet den äußeren Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega$.