

Analysis III, Übung 14

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

a) Es sei $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine injektive, stetige Abbildung auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\Phi|_U$ zu jedem U eine Einbettung ist.

b) Es sei $a, b \in (0, 1), a < b$ $M_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x^2 + y^2 < b\}$ und $\Phi_{a,b} : M_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tan\left(\pi\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2}\right)\right) \right)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\Phi_{a,b}$ eine Einbettung ist.

Aufgabe 2:

Es sei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{S^2} x^2 y^2 dS$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Funktion $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2)^{-2} d\lambda_2(x_1, x_2)$$

Aufgabe 4

Integrieren Sie das Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) := (4xz, -y^2, yz)$ über die Oberfläche des Würfels $[0, 1]^3$.

Integrieren Sie die Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) := (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ über die Oberfläche des Kegels $K := \{(x, y, z) : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$.

Abgabe bis zum 9.2.2011 um 10:00 in den Holzkasten nebem dem Büro von Herrn Neff. Bitte benutzen Sie für alle Übungsaufgaben ausschließlich weißes Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Ordner, Klarsicht-hüllen oder Hefter. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Die korrigierten Übungen können Sie dann in der folgenden Woche im Büro von Herrn Neff abholen.

Hausübung:

Aufgabe 1:

Man betrachte einen Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$ und eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Seien $A_n \in \mathcal{S}$ disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = M$. Beweisen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $f|_{A_n} : A_n \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes A_n messbar ist und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu$ konvergiert.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie:

$$\int_A f d\lambda_3 \quad \text{für } f(x, y, z) := \frac{2z}{(x+y)^2}, \quad A := [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2]$$
$$\int_A f d\lambda_2 \quad \text{für } f(x, y) := \exp(-x - y); \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$$

Aufgabe 3:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar, $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren in $\mathbb{R}^{n+1}$ den Rotationskörper

$$K_f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b] : \|x\| \leq f(t)\}$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K_f in Abhängigkeit des Volumens c_n der n -dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch $f(t) := |t|$ gegeben ist.

Aufgabe 4:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

- (a) Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so auch $f \cdot g$.
- (b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so ist f fast überall stetig.
- (c) Konvergiert eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen fast überall punktweise gegen eine integrierbare Grenzfunktion, so konvergiert diese Folge auch in L^1 .
- (d) $\{A \subset \mathbb{R} | A = A \cap \mathbb{Z}\}$ ist eine σ -Algebra.
- (e) Konvergiert eine Folge (f_n) integrierbarer Funktionen punktweise gegen eine Grenzfunktion f und existiert eine integrierbare Funktion g , so dass gilt $f_n(x) \leq g(x)$ für fast alle x und alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f integrierbar.
- (f) Die integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.
- (g) Ist $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und f meßbar, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) := (x^3, y^3, z^3)$, über die Oberfläche der Kugel vom Radius $R > 0$.

Integrieren Sie die Rotation des Vektorfeldes $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) := (2y, 3x, -z^2)$ über die Oberfläche der oberen Hälfte der Kugel vom Radius 3.